2022 年澳大利亚数学奥林匹克

2022-07-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_66d83eafabfd9e8f

第一天

1. 若一个凸五边形的边长均为整数，且周长为奇数．求证：该凸五边形可以有两个直角，但不能有超过两个直角．

2. 设点 P 在凸六边形 $ABCDEF$ 内部，使 $PABC$，$PCDE$，$PEFA$ 为面积相等的平行四边形．求证：$PBCD$，$PDEF$，$PFAB$ 也为面积相等的平行四边形．

3. 求所有实系数多项式 $p(x)$，使得：
(1) 对任意正实数 x，都有 $p(x)>0$；
(2) 对任意满足 $xyz=1$ 的正实数 x，y，z，都有 $\dfrac{1}{p(x)}+\dfrac{1}{p(y)}+\dfrac{1}{p(z)}=1$.

4. 设平面点集 $S=\{(i,j)\mid i,j\in\{1,2,\cdots,2022\},i<j\}$．将 S 中的点染成红、蓝二色之一，满足若点 (i,j) 和点 (j,k) 同色，则点 (i,k) 也和它们同色．
问：有多少种对 S 的染色方式?

第二天

1. 数列 x_1，x_2，$\cdots$，x_{2022} 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{2022}>0$．若存在正整数 $k<2022$，使得：
(1) 数列的前 k 项均不超过 0；
(2) 数列的剩余项均不小于 0.
求证：$x_1+2x_2+3x_3+\cdots+2022x_{2022}>0$.

2. 在 Biplania 国家中有两家航空公司，分别为 Redwing 和 Blueways，该国家有 20 个城市，其中两个为 Abadu 和 Ethora．在任意两个城市之间，两家航空公司中恰好有一家有直达航班，并且该航空公司在两个城市之间双向飞行．
Arthur 只坐 Redwing 的飞机，他从 Abadu 飞到 Ethora 需要乘坐四趟航班．
Martha 只 Blueways 的飞机．
求证：Martha 在该国家内从任意一个城市到另一个城市至多只需乘坐两趟航班．

3. 对任意正整数 n，记 $f(n)$ 为 n 和与 n 最近的 2 的幂之差．称 n 的停止次数为 k，如果 k 为使得 $f(f(\cdots f(n)\cdots))=0$（将 f 迭代 k 次）的最小正整数．例如：$f(54)=10$，$f(10)=2$，$f(2)=0$，则 54 的停止次数为 3.
(1) 求停止次数为 2022 的最小正整数.
(2) 最多有多少个连续的正整数，具有相同的停止次数?

4. 锐角三角形 ABC 的垂心为 H．过点 B 和点 C 的高分别和 $\angle BAC$ 的角平分线交于点 D 和点 E．$\triangle DEH$ 的外接圆在点 D 和点 E 处的切线交于点 X．求证：$BX=CX$.