一道因看错题目产生的好题

2025-04-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_66ea039d58d6b2c0

2023 年北方希望之星数学邀请赛第 1 题如下：

> 设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 满足：（1）对于 $1 \le i \le 10$，有 $a_i \ge \frac{1}{i}$；（2）对 $1 \le i \le 9$，有 $a_i a_{i+1} \le 1$. 求 $S = \sum_{i=1}^{10} i a_i$ 的最大值.

本题非常简单，可设 $b_i = i a_i$，于是 $b_i \ge 1$，$\forall 1 \le i \le 10$，$b_i b_{i+1} \le i(i+1)$，$\forall 1 \le i \le 9$. 要求 $\sum_{i=1}^{10} b_i$ 的最大值.

利用局部不等式 $(b_i - 1)(b_{i+1} - 1) \ge 0$，可得 $b_i + b_{i+1} \le b_i b_{i+1} + 1$，对 $i = 1, 3, 5, 7, 9$ 求和即可.

可以自己思考：为什么不对 $i = 2, 4, 6, 8, 10$ 求和，或者对全体 $1 \le i \le 10$ 求和?

取最大值时，b_i 依次为

$1, 2, 1, 12, 1, 30, 1, 56, 1, 90$

我将本题放在了本周的预赛模拟卷中，一学生在做的时候，将条件（2）看成了“对 $1 \le i \le 10$，$a_i a_{i+1} \le 1$”（即多了一个 $a_{10} a_1 \le 1$ 的限制），导致没有做出.

这样改完后，题目难度有所提高，可作为一道联赛第一题，这里写一个我的解答：

先作同样的换元，题目变为：

> 正实数 $b_1, b_2, \cdots, b_{10}$ 满足：对于 $1 \le i \le 10$，有（1）$b_i \ge 1$；（2）$b_i b_{i+1} \le i(i+1)$，这里 $b_{11} = b_1$. 求 $S = \sum_{i=1}^{10} b_i$ 的最大值.

来猜一下取等：首先还是把乘积尽可能取到最大值，但由于 $b_{10} b_1 \le 10$，故我们将 b_9 取到 72，依次得到 b_i 的取值如下：

$2, 1, 6, 1, 20, 1, 42, 1, 72, \frac{5}{4}$

此时 $S = 147.25$. 下证 $S \le 147.25$.

（1）考虑 $b_1 + b_2 + b_3$：

$b_1 \le \dfrac{2}{b_2}$，$b_2 \in [1, 2]$，$b_3 \le \dfrac{6}{b_2}$，于是

$b_1 + b_2 + b_3 \le b_2 + \frac{8}{b_2} \le 9$

（2）考虑 $b_4 + b_5 + b_6 + b_7$：

$b_4 + b_5 \le 1 + b_4 b_5 \le 21 b_6 + b_7 \le 1 + b_6 b_7 \le 43$

（3）考虑 $b_8 + b_9 + b_{10}$：

$b_8 \le \dfrac{72}{b_9}$，$b_9 \in [1, 72]$，$b_{10} \le \dfrac{90}{b_9}$，于是

(i) $b_i \in [9, 72]$ 时，

$b_8+b_9+b_{10}\le b_9+\frac{162}{b_9}\le 72+\frac{162}{72}$

(ii) $b_9\in[\frac{9}{7},9]$ 时，$b_{10}\le b_{10}b_1\le 10$

$b_8+b_9+b_{10}\le \frac{72}{b_9}+b_9+10\le 56+\frac{9}{7}+10<72$

(iii) $b_9\in[1,\frac{9}{7}]$ 时，$b_8\le 56$，$b_{10}\le 10$

$b_8+b_9+b_{10}\le 56+\frac{9}{7}\le 10<72$

相加即证.