加拿大 CRUX 杂志问题 4701-4710

2022-02-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_67284631638cc4bb

1. 设 AD，BE，CF 为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线（D 在 BC 上，E 在 CA 上，F 在 AB 上）. 过 D 作 BC 的垂线，和 AD 的中垂线交于点 A'，类似定义 B' 和 C'. 求证：AA'，BB'，CC' 三线共点，且满足

$$AA' \cdot BB' \cdot CC' \leq \left(\frac{3R}{4}\right)^3$$

其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

（Michel Bataille 供题）

1. 设 p 为一个模 4 余 3 的素数，S 为所有模 p 的平方剩余所构成的集合. 求证：

$$\prod_{\substack{a<b \\ a,b\in S}} (a+b) = \pm 1 (\mathrm{mod} p)$$

（S. Chandrasekhar 供题）

1. $\triangle ABC$ 的外接圆为圆 O，圆 O 在点 A、B、C 处的切线分别交于 D、E、F 三点，其中 A 在 EF 上，B 在 FD 上，C 在 DE 上. 点 D'、E'、F' 分别为点 D、E、F 关于 BC、CA、AB 的对称点. 求证：$D'E' \parallel OB$ 当且仅当 $D'F' \parallel OC$.

（陈嘉昊供题）

1. 已知 a，b，c，$d \in [0,1)$，求证：

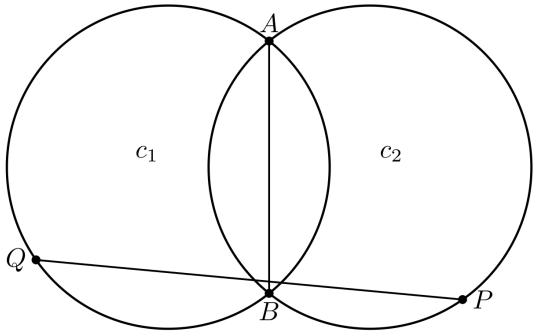
$$\frac{1}{1-a^6} + \frac{1}{1-b^6} + \frac{1}{1-c^6} + \frac{1}{1-d^6} \geq \frac{2}{1-(abc)^2} + \frac{2}{1-abcd}.$$

（Daniel Sitaru 供题）

1. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

（Nguyen Viet Hung 供题）

1. 如图，圆 c_1 和圆 c_2 交于 A、B 两点，点 P 在 c_2 上，点 Q 在 c_1 上. 仅用一把没有刻度的直尺，作出 PQ 中点，并进行证明.



(Thanos Kalogerakis 供题)

1. 设 n 为整数，且满足 $n \geq 2$，求证：

$$\sum_{k=1}^{n-1} \csc^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n^2-1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \csc^4\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n^4+10n^2-11}{45}$$

(Michel Bataille 供题)

1. α，β，γ 为任意三角形的三个内角，求证：

$$\frac{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}{3} \leq \cot\left(\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}\right)$$

并说明等号成立条件.

(Conar Goran 供题)

1. $\triangle ABC$ 为锐角三角形，O 为外心. 记 AO 交 BC 于点 D，BO 交 CA 于点 E，CO 交 AB 于点 F. 若 $BD\cos A = CE\cos B = AF\cos C$，求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形.

(Ion Patrascu 供题)

1. 求证：存在连续 2021 个自然数，其中每个数都无法表示为一个完全平方数与一个完全立方数之和.

（Omar Sonebi 供题，Editorial Board 修改）