三角换元法求一个二元最值

2021-04-20　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_67bc4fdc0c31a9fe

本文部分公式较长，阅读时请注意向右滑动.

题目已知 a，b 为实数，求

$$\frac{(1-a)(1-b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}$$

的最值.

(Mathematical Reflection O515)

分析首先尝试令 $a=b$ 去猜测取得最值的条件.（一般而言，对称式在变量相等处取得极值）

设 $f(a,b)=\dfrac{(1-a)(1-b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}$.

则 $f(a,a)=g(a)=\dfrac{(1-a)^3(1+a)}{(1+a^2)^2}$.

于是 $g'(a)=-\dfrac{(a-1)^2(a^2+4a+1)}{(a^2+1)^3}$.

因此 $g(a)$ 极值点为 $-2\pm\sqrt{3}$.

这是一个不太容易直接由代数变形产生的数字，但注意到它们在三角函数中的特殊性：

$$\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-2+\sqrt{3}$$

与

$$\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=-2-\sqrt{3}$$

转而考虑三角换元. 由 a，b 可取任意实数以及上述分析，我们选择正切函数进行换元.

解答（PDF 中已展开）

解答令 $a=\tan x$，$b=\tan y$，其中 $x,y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，并记原式为 f. 则

$$\begin{aligned}
f=&\frac{(1-\tan x)(1-\tan y)(1-\tan x\tan y)}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)}\\
=&\frac{(\cos x-\sin x)(\cos y-\sin y)(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}{(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 y+\sin^2 y)}\\
=&(\cos x-\sin x)(\cos y-\sin y)(\cos x\cos y-\sin x\sin y)\\
=&(\cos x\cos y+\sin x\sin y-\cos x\sin y-\sin x\cos y)\cos(x+y)\\
=&(\cos(x-y)-\sin(x+y))\cos(x+y)\\
=&\left(\cos(x-y)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)\right)\cos(x+y)\\
=&2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cos(x+y)
\end{aligned}$$

为书写方便，记 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}-x$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}-y$.

于是 $f=2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta$.

由 Cauchy 不等式及均值不等式，有

$$\begin{aligned}
f^2=&4\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
=&4(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
\le&4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
=&\frac{16}{3}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{2}\cdot\frac{3\cos^2\alpha+3\cos^2\beta}{2}\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\\
\le&\frac{16}{3}\left(\frac{\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{2}+\dfrac{3\cos^2\alpha+3\cos^2\beta}{2}+\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{4}\right)^4\\
=&\frac{27}{16}
\end{aligned}$$

即 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\le f\le\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

当 $a=b=-2\pm\sqrt{3}$ 时，f 分别取得最大（小）值 $\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.