2022 年美国第三届圣诞数学奥林匹克

2022-03-22 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_67fe85a98c6d17e8

这是 aops 上圣诞节讨论组举办的一系列比赛之一，CIME 是 AIME 的模拟赛，CAMO 是 USAMO 的模拟赛，CJMO 是 USAJMO 的模拟赛.

第一天

1. 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，M 为 BC 的中点，D 为 A 在 BC 上的垂足. 点 P 满足凸四边形 $HMPD$ 为平行四边形，以 P 为圆心，且过点 B、C 的圆和 AB 再次交于点 X，和 AC 再次交于点 Y. 求证：D、X、Y 三点共线.

2. 求所有函数 $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意整数 x 和 y，都有
$$f(f(x)f(y)) = f(xf(y)) + f(y).$$

3. 正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 满足：能将正整数集划分为无穷多个互不相交的集合，每个集合均为 $\{a_1k, a_2k, \cdots, a_nk\}$ 的形式，其中 k 为正整数. 求证：对任意 $1 \le i \le n$，都有 $a_i \mid a_n$.

第二天

1. 某机场有 $10^{2022} \times 10^{2022}$ 个排列成网格状的登机口，按某种顺序依次编号为 1，2，$\cdots$，10^{4044}. 一个旅客忘记了她的登机口，一名员工无助地告诉她，她的登机口是独一无二的，只有它的编号比所有相邻（水平和垂直方向）登机口的编号都要小. 员工略带同情，允许旅客问一些问题，如果她询问特定登机口的编号，员工会如实回答.（旅客知道机场的布局，但不知道每个登机口的编号）
求证：不论登机口如何编号，该旅客总能通过至多问 10^{2023} 个问题而知道自己的登机口.

2. 证明或否定如下命题：对任意正整数 k，都有
$$\gcd((2k-1)^{2k-1} + (2k+1)^{2k+1}, (2k-1)^{2k+1} + (2k+1)^{2k-1}) = 4k^2.$$

3. 凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 满足 $A_{i-1}A_{i+1} \parallel A_{i-2}A_{i+2}$ 对任意 i 均成立，这里下标按照模 5 理解. 求证：存在点 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，满足：

- 对任意 i，都有 B_i，A_{i-2}，A_{i+2} 共线；
- 五条线段 A_iB_i 的长度均相等；
- 五条直线 A_iB_i 交于一点.