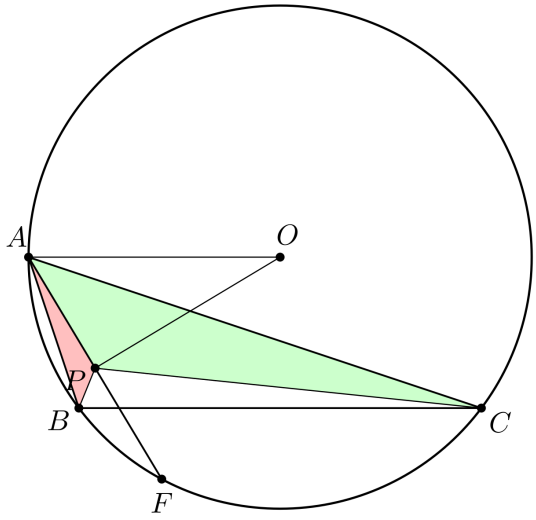
用 Dumpty 点的性质证明一道平面几何新题

2024-10-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_681f26dc3f36267b

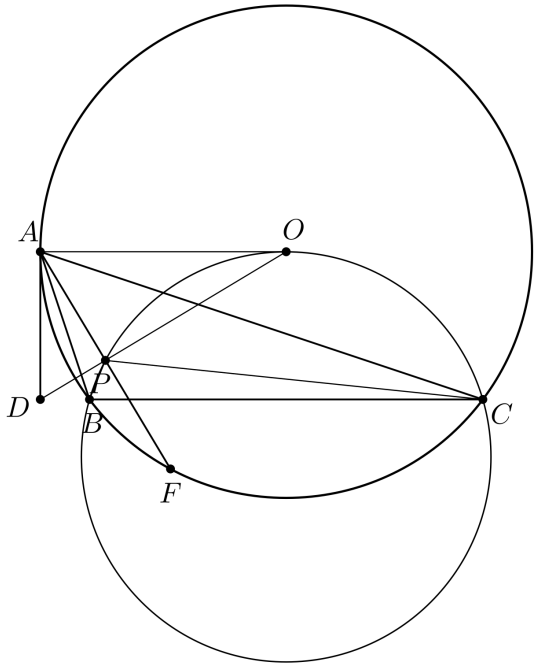
首先简单介绍 Dumpty 点（熟悉的读者可以直接看后面的题目）：

点 P 在 $\triangle ABC$ 内部，且满足 $\triangle APB \sim \triangle CPA$，则称点 P 为 $\triangle ABC$ 的 A-Dumpty 点，简称 DM 点.



点 P 具有以下性质：

1. 点 P 为外心 O 在 A-陪位中线上的射影；
2. B, O, P, C 四点共圆；
3. 过 A 作外接圆的切线，和 BC 交于点 D，则 O, P, D 三点共线.



证明:

1. 延长 AP 交 $\odot(ABC)$ 于点 F. 由 $\angle CBF=\angle CAP=\angle ABP$, $\angle BCF=\angle BAP=\angle ACP$ 知:

$\triangle APB\sim\triangle CPA\sim\triangle CFB$

于是 $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$, 即 $ABFC$ 为调和四边形, AP 为 A-陪位中线.

由 $\angle APB=\angle APC$, 熟知 P 为 AF 中点 (2011 年高联), 于是 $OP\perp AP$.

1. $\angle BPC=\angle BAC+\angle ABP+\angle ACP=2\angle BAC=\angle BOC$

于是, B,O,P,C 四点共圆.

1. 设 OD 和 $\odot(BOC)$ 交于点 P' (异于点 O), 则

$DO\cdot DP'=DB\cdot DC=DA^2$

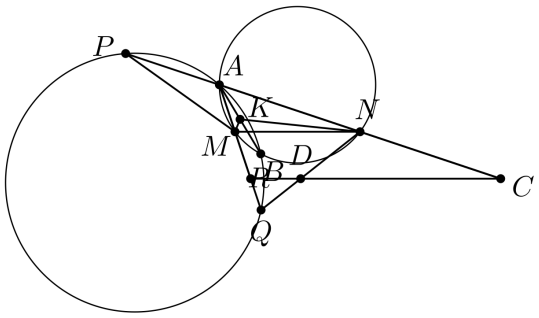
由 $OD\perp AD$ 及射影定理知: $\angle OP'A=90^\circ$, 于是 $P'=P$, 即 O,P,D 三点共线.

点 P 的等角共轭点 Humpty 点 (简称 HM) 点也很有名, 其为垂心 H 在中线上的射影.

下面用 Dumpty 点的性质来证明一道几何题:

在锐角 $\triangle ABC$ 中, M,N 分别为边 AB,AC 的中点. 点 D 在线段 BC 上, 且 $DB<DC$. 设 P 为 DM 和 AC 的交点, Q 为 DN 和 AB 的交点. 设 $\triangle APQ$ 和 $\triangle AMN$ 的外接圆交于点 R

(异于点 A)，点 K 为 AR 的中点. 求证：$\angle MKN = 2\angle BAC$. (2024 年伊比利亚美洲数学奥林匹克)



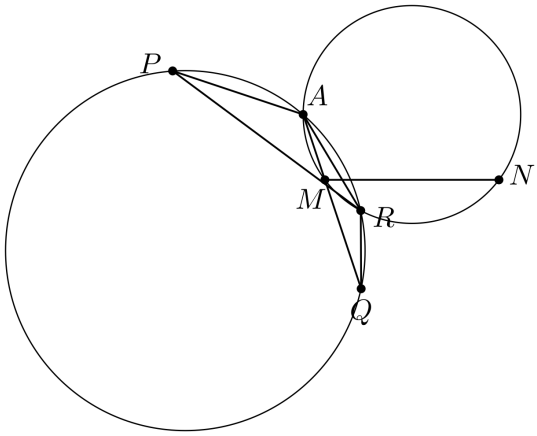
证明：

易证 $\triangle AMN$ 和 $\triangle ABC$ 关于点 A 位似，位似比为 $1:2$. 由 K 为 AR 中点知，K, R 为位似对应点，故 $\angle BRC = \angle MKN$.

只需证明：$\angle BRC = 2\angle BAC = \angle BOC$ (其中 O 为 $\triangle ABC$ 外心)，即 B, O, R, C 四点共圆.

由 Dumpty 点的性质，转证：$\triangle ARB \sim \triangle CRA$.

删去无关的点和线后，得到下图：



由相交两圆的性质，容易发现：$\triangle MRQ \sim \triangle NRP$.

由 M, N 分别为 AB, AC 中点和相似对应，只需证：$\dfrac{BQ}{QA} = \dfrac{AP}{PC}$.

而这用 DMP 和 NDQ 截 $\triangle ABC$ 的梅涅劳斯定理是显然的，证毕.