【勘误】等轴双曲线内接正三角形的面积最小值

2022-12-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_689cf996e68da156

昨天发的文章中有两处错误，感谢读者指出。

第一处是命题 1 的图中，点 E 和点 F 标反了。

第二处是最后计算面积的时候，半径 R 应为 2|OP|，而不是 1/2|OP|，后面的计算也随之产生了错误。

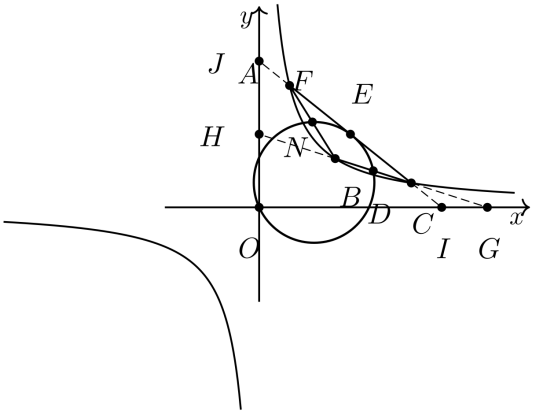
这里把两处错误改了过来，重新发一下

> 在平面直角坐标系中，点 A，B，C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足 $\triangle ABC$ 为等边三角形．求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值.

注：本题改编自 2020 年高联一试第 11 题，原题为等腰直角三角形.

首先我们有一个关于等轴双曲线的熟知结论：

命题 1：等轴双曲线 $xy=m$ 上任意三点构成的三角形的九点圆（中点三角形的外接圆）过原点.



证明：如图，首先有 D 为 GH 中点.（将 BC 分别与 $xy=m$、$xy=0$ 联立，由韦达定理知 BC 中点和 GH 中点重合．也可以利用反比例函数的等面积性质，使用纯几何方法证明.）

于是 OD 为直角 $\triangle OGH$ 的斜边中线.

$\therefore \angle DOG=\angle DGO$，同理 $\angle EOJ=\angle EJO$．于是

$$\begin{aligned}\angle EOD =&\angle EOJ + \angle JOG + \angle GOD\\ =&\angle EJO + 90^\circ + \angle OGD\\ =&90^\circ + \angle JOG - \angle C\\ =&180^\circ - \angle DFE\end{aligned}$$

于是 O、D、F、E 四点共圆，证毕.

接下来证明等轴双曲线上的内接三角形满足的充要条件.

命题 2： 点 A，B，C 在等轴双曲线 $xy = m$ 上，则 $\triangle ABC$ 为正三角形的充要条件为：$\triangle ABC$ 的外接圆和双曲线的第四个交点恰为 $\triangle ABC$ 外心 P 关于原点 O 的对称点.

证明： 易知三角形的外接圆和九点圆关于重心位似，相似比为 $2:1$.

当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，重心、外心、九点圆心重合于三角形中心，于是由九点圆过原点知，外接圆过外心关于原点的对称点.

反之也能得到外心和九点圆心重合，于是也和重心重合，故三角形为正三角形.

回到原题.

由命题 2 可知，$\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = 2|OP|$，于是 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

只需求 $xy = 1$ 上任意一点 $(x, \frac{1}{x})$ 到原点距离的最小值，由均值不等式知显然为 $\sqrt{2}$.

于是 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $6\sqrt{3}$.