2025 年哈佛-麻省数学竞赛（HMMT）2 月锦标赛

2025-02-17　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_68d00e27e40bec67

本文为图片版：正文为 3 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

恩次方根
ENCIFANGGEN

2025 年哈佛-麻省数学竞赛（HMMT）2 月锦标赛（代数与数论组）

1. 计算 9! 的所有个位数字为 1 的正约数（包括 1）之和.

2. 马克在黑板上写下表达式 $\sqrt{\overline{abcd}}$，其中 $\overline{abcd}$ 是一个四位数且 $a \neq 0$. 蹒跚学步的德里克决定移动 a，将马克的表达式变成 $a\sqrt{\overline{bcd}}$. 令人惊讶的是，这两个表达式相等. 计算出唯一可能的四位数 $\overline{abcd}$.

3. 已知 x、y 和 z 是正实数，且满足

$$x^{\log_2(yz)} = 2^8 \cdot 3^4, y^{\log_2(zx)} = 2^9 \cdot 3^6, z^{\log_2(xy)} = 2^5 \cdot 3^{10},$$

计算 xyz 的最小可能值.

4. 设 $\lfloor z \rfloor$ 表示不超过 z 的最大整数. 计算

$$\sum_{j=-1000}^{1000} \left\lfloor \frac{2025}{j+0.5} \right\rfloor.$$

5. 设 S 是所有满足 $P(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = P(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 的所有非常数的首一整系数多项式 P 的集合. 如果 Q 是 S 中次数最小的元素，计算 $Q(10) - Q(0)$ 的唯一可能值.

6. 设 r 是 $2017^{2025!} - 1$ 除以 2025! 的余数. 计算 $\frac{r}{2025!}$. （注：2017 是质数.）

7. 存在唯一的三元正实数组 (a, b, c) 满足方程

$$2(a^2+1) = 3(b^2+1) = 4(c^2+1)$$

且 $ab + bc + ca = 1$. 计算 $a + b + c$ 的值.

8. 定义 $\operatorname{sgn}(x)$：当 x 为正数时，$\operatorname{sgn}(x) = 1$；当 x 为负数时，$\operatorname{sgn}(x) = -1$；当 $x = 0$ 时，$\operatorname{sgn}(x) = 0$. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(\sin(2^n))}{2^n}$$

（sin 函数的自变量为弧度制.）

9. 设 f 是次数至多为 2026 的唯一多项式，使得对于所有 $n \in \{1, 2, 3, \cdots, 2027\}$，有

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n\text{是完全平方数} \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases}$$

假设 f 中 x^{2025} 的系数为 $\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 是整数且 $\gcd(a, b) = 1$. 求在 0 到 2026（含 2026）之间的唯一整数 r，使得 $a - rb$ 能被 2027 整除.（注：2027 是质数.）

10. 设 a、b 和 c 是两两不同的复数，且满足

$$a^2 = b + 6, b^2 = c + 6, c^2 = a + 6.$$

计算 $a + b + c$ 的两个可能值.

1

恩次方根
ENCIFANGGEN

2025 年哈佛-麻省数学竞赛（HMMT）2 月锦标赛（组合组）

1. 将数字 $1,2,3,4,5,6,7$ 围绕一个圆圈排列，使得圆圈上每对相邻数字的乘积至多为 20，共有多少种排列方式．（旋转和反射视为不同的排列．）

2. 青蛙 Kelvin 在一个 3×3 的睡莲池网格的左下角睡莲上，它的家在右上角的睡莲上．它只能在水平或垂直相邻的两个睡莲之间跳跃．移除其中 4 个睡莲，使得左下角和右上角的睡莲都保留，但凯尔文无法回家，共有多少种移除方式．

3. Ben 有 16 个球，分别标有数字 $1,2,\cdots,16$，以及 4 个相同的盒子．如果两个球的标签相差 1，则称它们是相邻球．在每个盒子内各放入 4 个球，使得每个球至少与它的一个相邻球在同一个盒子内，共有多少种方法．（球放入盒子的顺序无关紧要．）

4. Sophie 在坐标网格的 $(0,0)$ 位置，她想到达 $(3,3)$．如果 Sophie 在 (x,y) 位置，她在一步中可以移动到 $(x+1,y),(x,y+1),(x-1,y+1)$ 或 $(x+1,y-1)$ 中的任意一个位置．在移动过程中，她不能重复经过任何一点，且她的横坐标和纵坐标都不能小于 0 或大于 3．求 Sophie 到达 $(3,3)$ 的方法数．

5. 在一个 11×11 的单元格网格中，每对相邻的边缘单元格由一扇门连接．卡蒂克想在这个网格中走一条路径．他可以从任何单元格开始，但必须回到起始单元格，并且他不能多次穿过同一扇门（即使是相反方向）．计算他在这样的路径中最多可以穿过的门的数量．

6. 在一个 5×5 的正方形网格中，选择两个矩形，使得矩形的边位于网格线上，并且两个矩形不重叠（包括内部、边界和顶点），共有多少种选择方式．选择矩形的顺序无关紧要．

7. 将 26 个小写字母进行排列．每个小写字母恰出现二次，使得对于任意两个不同的字母 x_1 和 x_2，在 x_1 的第一次和第二次出现之间 x_2 的数量等于在 x_1 的第二次和第三次出现之间 x_2 的数量．共有多少种排列方式？

8. Albert 在黑板上的一个圆圈中写下 2025 个数 $a_1,\cdots,a_{2025}$，每个数都是从区间 $[0,1]$ 中均匀且独立地随机抽取的．然后，每秒他同时将 a_i 替换为 $\max(a_{i-1},a_i,a_{i+1})$，其中 $i=1,2,\cdots,2025$（这里 $a_0=a_{2025}$ 且 $a_{2026}=a_1$）．计算 100 秒后，黑板上的数中，不同数的个数的期望值．

9. 在一个正六边形内独立且均匀随机地选择两个点．计算过这两个点的直线与正六边形的一组平行的对边相交的概率．

10. 一个圆的周长被分成 45 条弧，每条弧长均为 1．起初，有 15 条长度为 1 的蛇，每条蛇占据每三条弧中的一条．每秒，每条蛇独立地以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一条弧．如果两条蛇相遇，它们会合并成一条蛇，占据之前两条蛇的弧，并且合并后的蛇作为一条蛇移动．计算直到只剩下一条蛇所需的期望秒数．

恩次方根
ENCIFANGGEN

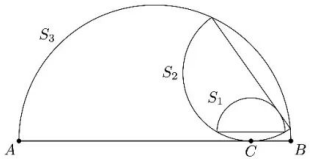
2025 年哈佛-麻省数学竞赛（HMMT）2 月锦标赛（几何组）

1. 作等边三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$，使得点 B、E、F、C 依次位于一条直线上，且点 D 在 $\triangle ABC$ 内部．若 $BE=14$，$EF=15$，$FC=16$，计算 AD 的长度．

2. 在一个具有平行底面和顶面的二维洞穴中，两根长度分别为 16 和 36 的钟乳石垂直从顶面垂下，同时两根高度分别为 25 和 49 的石笋垂直从地面长出．若这四个结构的顶端按某种顺序构成一个正方形的顶点，计算洞穴的高度．

3. 点 P 位于正方形 $ABCD$ 内部，使得 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$ 和 $\triangle PDA$ 的面积按某种顺序分别为 1、2、3 和 4．计算 $PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD$ 的值．

4. 如果一个较小的半圆的直径是较大半圆的一条弦，且较小半圆的弧与较大半圆的直径相切，那么称较小半圆内接于较大半圆．半圆 S_1 内接于半圆 S_2，半圆 S_2 又内接于半圆 S_3．S_1 和 S_3 的半径分别为 1 和 10，且 S_1 和 S_3 的直径平行．S_3 直径的端点为 A 和 B，S_2 的弧与 AB 相切于 C 点．计算 $AC\cdot CB$ 的值．



5. 设 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形．点 P 在 $\triangle ABC$ 内部，且 $\angle BPC=120^\circ$．以 $\overline{AP}$ 为直径的圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆再次相交于点 X（$X\neq A$）．已知 $AX=5$，计算 XP 的长度．

6. 梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，边长分别为 $AB=11$，$BC=8$，$CD=19$，$DA=4$．计算以 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$ 和 $\triangle DAB$ 的外心为顶点的凸四边形的面积．

7. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内部，且 $\angle ABP=\angle ACP$．已知 $AB=6$、$AC=8$，$BC=7$，且 $\frac{BP}{PC}=\frac{1}{2}$，计算 $\frac{[BPC]}{[ABC]}$ 的值．（此处，$[XYZ]$ 表示 $\triangle XYZ$ 的面积．）

8. 设 $ABCD$ 是等腰梯形，$CD>AB=4$．点 E 在直线 CD 上，且 $DE=2$，D 位于 E 和 C 之间．M 是 $\overline{AE}$ 的中点．已知点 A、B、C、D 和 M 在半径为 5 的圆上，计算 MD 的长度．

9. 设 $ABCD$ 是矩形，$BC=24$．点 X 在矩形内部，且 $\angle AXB=90^\circ$．已知 $\triangle AXD$ 和 $\triangle BXC$ 均为锐角三角形，且它们的外接圆半径分别为 13 和 15，计算 AB 的长度．

10. 平面 P 与一个长方体相交形成一个六边形，其边长依次为 45、66、63、55、54 和 77．计算长方体中心到平面 P 的距离．

3

还有 guts round 和 team round 的题目，明天再继续翻译，英文试题和答案可以点击阅读原文进入官网查看。