2023 年四川预赛第 8 题解答

2023-05-25 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6a9ba6addc2f71cc

这道题最近很火，不少粉丝让我写个解答。

视频讲解晚点会上传到我的 B 站，欢迎大家关注同名 B 站账号：恩次方根。

视频讲解晚点会上传到我的 B 站，欢迎大家关注同名 B 站账号：恩次方根。

题目：（2023 年四川预赛第 8 题）

设 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，则 $3\cos A+2\cos 2B+\cos 3C$ 的取值范围为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案：

$$\left(-\frac{25}{16},6\right)$$

构造：

$A\to 0$，$B\to\pi$，$C\to 0$ 时，原式趋于 6；

$C\to 0$，$\cos A\to -\frac{3}{8}$，$\cos B\to\frac{3}{8}$ 时，原式趋于 $-\frac{25}{16}$.

证明：

上界证明显然，下面证明：

$$3\cos A+2\cos 2B+\cos 3C>-\frac{25}{16}$$

结合 $A+B+C=\pi$ 和取等条件，进行均值换元：

设 $A=\frac{\pi}{2}+\alpha$，$B=\frac{\pi}{2}-\beta$，则 $C=\beta-\alpha$，且由 $A,B,C\in[0,\pi]$，有 $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\beta\le\frac{\pi}{2}$.

（注：为方便书写，这里让 α,β 能够取到端点值.）

于是

$$\begin{aligned}&3\cos A+2\cos 2B+\cos 3C\\=&3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\cos(\pi-2\beta)+\cos(3\beta-3\alpha)\\=&-3\sin\alpha-2\cos 2\beta+\cos(3\beta-3\alpha)\end{aligned}$$

固定 β，将上式看作关于 α 的函数 $f(\alpha)$，其中 $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\beta]$.

于是 $f(\alpha)$ 的最小值只可能在端点和极值点处取得.

令 $f'(\alpha)=-3\cos\alpha+3\sin(3\alpha-3\beta)=0$ 得：$\sin(3\alpha-3\beta)=\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$，其中 $3\alpha-3\beta\in[-3\pi,0]$，$\frac{\pi}{2}-\alpha\in[0,\pi]$.

于是 $3\alpha-3\beta=-\frac{3\pi}{2}+\alpha$ 或 $-\frac{3\pi}{2}-\alpha$.

只需考虑：$\alpha=0,\beta,\frac{3\beta}{2}-\frac{3\pi}{4},\frac{3\beta}{4}-\frac{3\pi}{8}$ 的情形.

(1)$\alpha-\frac{\pi}{2}$ 时，

$$f(\alpha)=3-2\cos(2\beta)+\cos(3\beta+\frac{3\pi}{2})\geq 0$$

(2)$\alpha=\beta$ 时，

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=-3\sin\beta-2\cos 2\beta+1\\&=-4\sin^2\beta-3\sin\beta-1\\&=(2\sin\beta-\frac{3}{4})^2-\frac{25}{16}\\&\geq-\frac{25}{16}\end{aligned}$$

(3)$\alpha=\frac{3\beta}{2}-\frac{3\pi}{4}$ 时，由 $\alpha\geq-\frac{\pi}{2}$ 得：$\beta\geq\frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=-3\sin\alpha-2\cos 2\beta-\cos(-\frac{3\pi}{2}+\alpha)\\&=-3\sin\alpha-2\cos 2\beta+\sin\alpha\\&=-2\sin\alpha-2\cos 2\beta\\&=-2\sin(\frac{3\beta}{2}-\frac{3\pi}{4})-2\cos 2\beta\end{aligned}$$

设 $\beta=2\theta-\frac{\pi}{2}\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$，有 $\theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.

设 $t=\cos\theta\in[0,\frac{1}{2}]$，有

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=-2\sin(\frac{6\theta-\frac{3\pi}{2}}{2}-\frac{3\pi}{4})-2\cos(4\theta-\pi)\\&=-2\sin(3\theta-\frac{3\pi}{2})+2\cos 3\theta\\&=2\cos 4\theta-2\cos 3\theta\\&=4\cos^2 2\theta-2-2\cos 3\theta\\&\geq-4\cos 2\theta-3-\cos 3\theta\\&=-8t^3-8t^2+6t+1\\&=2t(1-2t)(2t+3)+1\\&\geq 1\end{aligned}$$

(4)$\alpha=\frac{3\beta}{4}-\frac{3\pi}{8}$ 时，由 $\alpha\geq-\frac{\pi}{2}$ 得：$\beta\geq-\frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) =& -3\sin\alpha - 2\cos 2\beta - \cos(-\frac{3\pi}{2} - \alpha) \\ =& -4\sin\alpha - 2\cos 2\beta \\ =& -4\sin(\frac{3\beta}{4} - \frac{3\pi}{8}) - 2\cos 2\beta \end{aligned}$$

设 $\beta = 4\theta - \dfrac{3\pi}{2} \in [-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}]$，有 $\theta \in [\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}]$. 于是

$$\begin{aligned} f(\alpha) =& -4\sin(\frac{12\theta - \frac{9\pi}{2}}{4} - \frac{3\pi}{8}) - 2\cos(8\theta - 3\pi) \\ =& -4\sin(3\theta - \frac{3\pi}{2}) + 2\cos 8\theta \\ =& 2\cos 8\theta - 4\cos 3\theta \\ =& 4\cos^2 4\theta - 2 - 4\cos 3\theta \\ \geq& 4\cos 4\theta - 3 - 4\cos 3\theta \\ \geq& 2\times 1 - 3 \\ >& -\frac{25}{16} \end{aligned}$$

倒数第二行的不等式用到了 (3) 中的结论，两种情况中的 θ 取值范围是一样的.

综上所述，有 $f(\alpha) \geq -\dfrac{25}{16}$，且等号当且仅当 $\alpha = \beta$ 时取得，于是在 $\triangle ABC$ 中，有

$$3\cos A + 2\cos 2B + \cos 3C > -\frac{25}{16}$$

评注：

本题难度还是很大的，个人认为是整张卷子最难一题（要求证明的话）。其实直接固定变量来求导也是可以做的，但是过程会复杂不少。这里通过均值换元给出了一个稍简洁一些的解答。