2023 年土耳其欧洲女子数学奥林匹克代表队选拔考试

2023-03-25　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6b016202016d3451

第一天

1. 设 $\triangle O_1O_2O_3$ 为锐角三角形. 分别以 O_1、O_2、O_3 为圆心，作三个两两相切的圆 ω_1、ω_2、ω_3. 设 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆和 ω_i 交于点 A_i、B_i $(i=1,2,3)$. 求证：由直线 A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3 所围成的三角形的内心与 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内心重合.

2. 求所有素数 p，q，使得

$$p(p^4+p^2+10q)=q(q^2+3).$$

1. 正实数 x，y，z 满足 $2xy>1$ 和 $yz>1$ 至少有一个成立. 求下式的最小值：

$$xy^3z^2+\frac{4z}{x}-8yz-\frac{4}{yz}.$$

第二天

1. 设 n 为正整数，实系数多项式 P、Q 满足 $P(x)=x^nQ\left(\frac{1}{x}\right)$，且对任意实数 x，都有 $P(x)\geq Q(x)$. 求证：对任意实数 x，都有 $P(x)=Q(x)$.

2. 在一所学校里，对任意 $1\leq l\leq 99$，均存在一个人恰有 l 个朋友. 且不存在三个人，他们两两都是朋友. 这所学校里至少有多少个人?

3. 设 $\triangle ABC$ 为不等边三角形，其外接圆在点 A 处的切线为 l_0. l 为一条平行于 l_0 的动直线，l 和线段 AB、AC 分别交于点 X、Y. BY 和 CX 交于点 T，直线 AT 和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 Z. 求证：随着 l 的移动，$\triangle XYZ$ 的外接圆过一定点.