2024 年韩国数学夏令营

2024-08-16 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6b33cec346fc5277

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2024 年韩国数学夏令营

第一天

程国根 译

1. 求所有整系数多项式 P，使得 $P(P(x))-x$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约.

2. 四边形 $ABCD$ 的两组对边均不平行. 对角线 AC 和 BD 交于点 E，点 P,Q 分别在边 AB,CD 上，且满足 $\frac{AP}{PB}=\frac{CQ}{QD}$. 直线 PQ 和 AC,BD 分别交于点 R,S. 求证：$(EAB),(ECD),(ERS)$ 三圆都过异于 E 的同一个点.

3. 定义数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下：$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=14a_{n+1}-a_n(n\geq 1)$. 求证：若 p 为素数，且存在正整数 n，使得 $\frac{a_n}{p}$ 为整数，则 $\frac{p-1}{12}$ 也为整数.

4. 求所有正整数对 (m,n)，使得人们可以用 1×2 或 2×1 的多米诺骨牌来分割一个 $m\times n$ 的棋盘，并在每个多米诺骨牌上画一条对角线，使得这些对角线无公共端点.

1

2024 年韩国数学夏令营

第二天

程国根　译

5. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle A, \angle B, \angle C$ 均为锐角. AB, CD 交于点 E, BC, DA 交于点 F. 设 K, L, M, N 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点，KM 和 BC, DA 分别交于点 X, Y，LN 和 AB, CD 分别交于点 Z, W. 求证：过点 E 及 ZW 中点的直线与过点 F 及 XY 中点的直线平行.

6. 求所有常数 $C \in \mathbb{R}$，使得存在实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足对任意 $n \geq 1$，都有 $a_n a_{n+1}^2 \geq a_{n+2}^4 + C$.

7. 2024 个人参加一个派对，他们在派对上进行了握手，试比较：每个人均恰与 4 人握手的方案数和每个人均恰与 3 人握手的方案数哪个更多?

8. 对正整数 n，记 $\tau(n)$ 为 n 的正约数个数. 是否存在三元正整数组 (a, b, c)，使得恰有 1012 个不超过 2024 的正整数 K 满足条件：存在正整数 x, y, z，使得

$$\tau(x) = \tau(y) = \tau(z) = \tau(ax + by + cz) = K.$$