2024 年阿贝尔数学竞赛（挪威数学奥林匹克）

2024-03-14 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6b573c97a12c0664

1.

a. 求所有整数 $n \geq 2$，使得 $n \mid s_n - t_n$，其中 s_n 为区间 $[1, n]$ 中所有与 n 互质的整数之和，t_n 为区间 $[1, n]$ 中剩余整数之和.

b. 求所有函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，使得对任意整数 n, m $(m > 1)$，

$$n, f(n), f(f(n)), \cdots, f^{m-1}(n)$$

模 m 的余数两两不同.

注： $f^0(n) = n$，且对任意 $k \geq 0$，$f^{k+1}(n) = f(f^k(n))$.

2.

a. 正整数 $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ 满足条件：对任意 $1 \leq i < j \leq n$，$a_j - a_i$ 均不为素数. 对每个 $n \geq 1$，求 a_n 的最小可能值.

b. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，都有

$$xf(f(x) + y) = f(xy) + x^2.$$

3.

a. 求最小的常数 N，使下面的命题成立：

几何国在组合国部署了秘密特工。任意两名特工都可以直接或通过其他特工进行通信。定义两个特工之间的距离为这两个特工之间通信链上的最小特工数量。

安德烈亚斯和爱德华就是这些特工中的一员，组合国把确定安德烈亚斯和爱德华之间距离的任务交给了诺亚。诺亚有一列数字，每个特工对应其中一个数字。一个特工的数字描述了从该特工到安德烈亚斯和爱德华两者的距离中的较大者。但是，诺亚不知道哪个数字对应哪个特工，也不知道哪些特工有直接联系。

基于以上信息，诺亚可以写下 N 个数字，并证明安德烈亚斯和爱德华之间的距离就是这 N 个数字中的一个（数字 N 与特工的通信网络无关）。

b. 2024-表是一个两行、2024 列的表格，其中写有数字 $1, 2, \cdots, 4048$. 称表格是被均匀染色的：如果表格中的每行恰有一半数字、每列恰有一个数字被染成红色. 对一个被均匀染色的 2024-表，称其中所有红色数字之和为红色和.

求最大的 N，使得对每个 2024-表，均存在一种均匀染色，其红色和不小于 N．并求出每一种均匀染色的红色和都不大于 N 的 2024-表的个数.

4.

a. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$，AD 为高．点 E 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，且 E 和 A 在直线 BC 的异侧，满足 $AD = DE$，$\angle ADO = \angle CDE$，其中 O 为 $\triangle ABC$ 的外心．求 $\angle BAC$ 的大小.

b. 已知圆内接五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 和 $I_1I_2I_3I_4I_5$，I_i 为 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 的内心（下标模 5 理解）．求证：$P_1I_1, P_2I_2, P_3I_3, P_4I_4, P_5I_5$ 五线共点.

图片版：

2024 年阿贝尔数学竞赛（挪威数学奥林匹克）

程国根　译

1. a. 求所有整数 $n \geq 2$，使得 $n \mid s_n - t_n$，其中 s_n 为区间 $[1, n]$ 中所有与 n 互质的整数之和，t_n 为区间 $[1, n]$ 中剩余整数之和.

b. 求所有函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，使得对任意整数 n, m（$m > 1$），

$$n, f(n), f(f(n)), \cdots, f^{m-1}(n)$$

模 m 的余数两两不同.

注：$f^0(n) = n$，且对任意 $k \geq 0$，$f^{k+1}(n) = f(f^k(n))$.

2. a. 正整数 $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ 满足条件：对任意 $1 \leq i < j \leq n$，$a_j - a_i$ 均不为素数．对每个 $n \geq 1$，求 a_n 的最小可能值.

b. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，都有 $xf(f(x)+y) = f(xy)+x^2$.

3. a. 求最小的常数 N，使下面的命题成立：

几何国在组合国部署了秘密特工。任意两名特工都可以直接或通过其他特工进行通信。定义两个特工之间的距离为这两个特工之间通信链上的最小特工数量。

安德烈亚斯和爱德华就是这些特工中的一员，组合国把确定安德烈亚斯和爱德华之间距离的任务交给了诺亚。诺亚有一列数字，每个特工对应其中一个数字。一个特工的数字描述了从该特工到安德烈亚斯和爱德华两者的距离中的较大者。但是，诺亚不知道哪个数字对应哪个特工，也不知道哪些特工有直接联系。

基于以上信息，诺亚可以写下 N 个数字，并证明安德烈亚斯和爱德华之间的距离就是这 N 个数字中的一个（数字 N 与特工的通信网络无关）。

b.2024-表是一个两行、2024 列的表格，其中写有数字 $1, 2, \cdots, 4048$．称表格是被均匀染色的：如果表格中的每行恰有一半数字、每列恰有一个数字被染成红色．对一个被均匀染色的 2024-表，称其中所有红色数字之和为红色和.

求最大的 N，使得对每个 2024-表，均存在一种均匀染色，其红色和不小于 N．并求出每一种均匀染色的红色和都不大于 N 的 2024-表的个数.

4. a. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$，AD 为高．点 E 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，且 E 和 A 在直线 BC 的异侧，满足 $AD = DE$，$\angle ADO = \angle CDE$，其中 O 为 $\triangle ABC$ 的外心．求 $\angle BAC$ 的大小.

b. 已知圆内接五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 和 $I_1I_2I_3I_4I_5$，I_i 为 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 的内心（下标模 5 理解）．求证：$P_1I_1, P_2I_2, P_3I_3, P_4I_4, P_5I_5$ 五线共点.

1

2024 年阿贝尔数学竞赛（挪威数学奥林匹克）

程国根　译

1. **a.** 求所有整数 $n\ge 2$，使得 $n\mid s_{n}-t_{n}$，其中 s_{n} 为区间 $[1,n]$ 中所有

与 n 互质的整数之和，t_{n} 为区间 $[1,n]$ 中剩余整数之和.

b. 求所有函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意整数 n,m（$m>1$），$n,f(n),f(f(n)),\cdots,f^{m-1}(n)$ 模 m 的余数两两不同. **注：**$f^{0}(n)=n$，且对任意 $k\ge 0$，$f^{k+1}(n)=f(f^{k}(n))$.

2. **a.** 正整数 $a_{0}<a_{1}<\cdots<a_{n}$ 满足条件：对任意 $1\le i<j\le n$，$a_{j}-a_{i}$ 均不为素数. 对每个 $n\ge 1$，求 a_{n} 的最小可能值.

b. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $xf(f(x)+y)=f(xy)+x^{2}$.

3. **a.** 求最小的常数 N，使下面的命题成立：几何国在组合国部署了秘密特工。任意两名特工都可以直接或通过其他特工进行通信。定义两个特工之间的距离为这两个特工之间通信链上的最小特工数量。安德烈亚斯和爱德华就是这些特工中的一员，组合国把确定安德烈亚斯和爱德华之间距离的任务交给了诺亚。诺亚有一列数字，每个特工对应其中一个数字。一个特工的数字描述了从该特工到安德烈亚斯和爱德华两者的距离中的较大者。但是，诺亚不知道哪个数字对应哪个特工，也不知道哪些特工有直接联系。基于以上信息，诺亚可以写下 N 个数字，并证明安德烈亚斯和爱德华之间的距离就是这 N 个数字中的一个（数字 N 与特工的通信网络无关）。

b.2024-表是一个两行、2024 列的表格，其中写有数字 $1,2,\cdots,4048$. 称表格是被均匀染色的：如果表格中的每行恰有一半数字、每列恰有一个数字被染成红色. 对一个被均匀染色的 2024-表，称其中所有红色数字之和为红色和. 求最大的 N，使得对每个 2024-表，均存在一种均匀染色，其红色和不小于 N. 并求出每一种均匀染色的红色和都不大于 N 的 2024-表的个数.

4. **a.** 在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，AD 为高. 点 E 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，且 E 和 A 在直线 BC 的异侧，满足 $AD=DE$，$\angle ADO=\angle CDE$，其中 O 为 $\triangle ABC$ 的外心. 求 $\angle BAC$ 的大小.

b. 已知圆内接五边形 $P_{1}P_{2}P_{3}P_{4}P_{5}$ 和 $I_{1}I_{2}I_{3}I_{4}I_{5}$，$I_{i}$ 为 $\triangle P_{i-1}P_{i}P_{i+1}$ 的内心（下标模 5 理解）. 求证：$P_{1}I_{1},P_{2}I_{2},P_{3}I_{3},P_{4}I_{4},P_{5}I_{5}$ 五线共点.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024 年阿贝尔数学竞赛（挪威数学奥林匹克）}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
\ex \textbf{a.}求所有整数$n\ge 2$，使得$n\mid s_{n}-t_{n}$，其中$s_{n}$为区间$[1,n]$中所有与$n$互质的整数之和，
↪ $t_{n}$为区间$[1,n]$中剩余整数之和. \vfill\textbf{b.} 求所有函数$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意整数$n,m$
↪ （$m>1$），$n,f(n),f(f(n)),\cdots,f^{m-1}(n)$
模 $m$ 的余数两两不同.
\textbf{注：}$f^{0}(n)=n$，且对任意$k\ge 0$，$f^{k+1}(n)=f(f^{k}(n))$. \vfill\ex
↪ \textbf{a.}正整数$a_{0}<a_{1}<\cdots<a_{n}$满足条件：对任意$1\le i<j\le n$，$a_{j}-a_{i}$均不为素数. 对每个$n\ge 1$，
↪ 求$a_{n}$的最小可能值. \vfill\textbf{b.}求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$，
↪ 都有$xf(f(x)+y)=f(xy)+x^{2}$. \vfill
\ex \textbf{a.} 求最小的常数 $N$，使下面的命题成立：
几何国在组合国部署了秘密特工。任意两名特工都可以直接或通过其他特工进行通信。
↪ 定义两个特工之间的距离为这两个特工之间通信链上的最小特工数量。
```

安德烈亚斯和爱德华就是这些特工中的一员，组合国把确定安德烈亚斯和爱德华之间距离的任务交给了诺亚。诺亚有一列数字，
↪ 每个特工对应其中一个数字。一个特工的数字描述了从该特工到安德烈亚斯和爱德华两者的距离中的较大者。但是，
↪ 诺亚不知道哪个数字对应哪个特工，也不知道哪些特工有直接联系。
基于以上信息，诺亚可以写下N个数字，并证明安德烈亚斯和爱德华之间的距离就是这N个数字中的一个
↪ （数字N与特工的通信网络无关）。\vfill\textbf{b.}2024-表是一个两行、2024列的表格，其中写有数字$1,2,\cdots,4048$.
↪ 称表格是被均匀染色的：如果表格中的每行恰有一半数字、每列恰有一个数字被染成红色．对一个被均匀染色的2024-表，
↪ 称其中所有红色数字之和为红色和.
求最大的N，使得对每个2024-表，均存在一种均匀染色，其红色和不小于N.
↪ 并求出每一种均匀染色的红色和都不大于N的2024-表的个数．\vfill\ex\textbf{a.}在$\triangle ABC$中，$AB<AC$，
↪ AD为高．点E在$\triangle ABC$的外接圆上，且E和A在直线BC的异侧，满足$AD=DE$，$\angle ADO=\angle
↪ CDE$，其中$O$为$\triangle ABC$的外心．求$\angle BAC$的大小.
↪ \vfill\textbf{b.}已知圆内接五边形$P_{1}P_{2}P_{3}P_{4}P_{5}$和$I_{1}I_{2}I_{3}I_{4}I_{5}$，$I_{i}$为$\triangle
↪ P_{i-1}P_{i}P_{i+1}$的内心（下标模$5$理解）．求证：$P_{1}I_{1},P_{2}I_{2},P_{3}I_{3},P_{4}I_{4},P_{5}I_{5}$五线共点．\vfill