邮资问题

2022-01-09 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6bb4327729ff2e30

今天上课给六年级的学生讲了一道邮资问题，涉及到的知识点有裴蜀等式、完全剩余系、整点问题，这里做个简单的记录.

例 1. (1) 用面值 8 分与 11 分的邮票（不限数量），有多少种资费支付不了?
(2) 用面值为 a，$b(a>b)$ 两种邮票 (不限数量)，有 35 种资费支付不了，求 a 和 b.

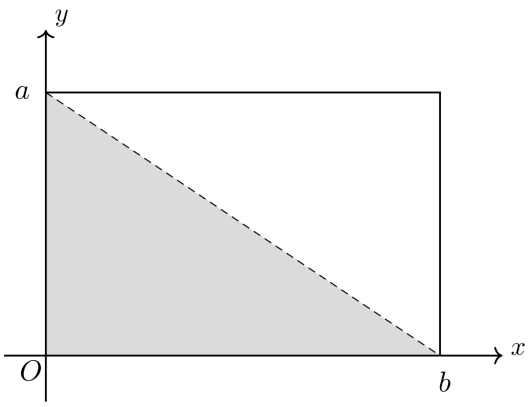
解： 直接做第二问，设面值为 a 的有 x 张，面值为 b 的有 y 张，总资费 $m=ax+by$，其中 a 和 b 为正整数，m，x，y 为自然数. 即考虑 m 为何值时，方程 $ax+by=m$ 无自然数解.

1. 首先由裴蜀定理知，$\gcd(a,b)\mid m$. 也就是说，如果 $\gcd(a,b)\neq 1$，那么有无数个自然数 m 不能被 $\gcd(a,b)$ 整除，此时 $ax+by=m$ 均无自然数解. 于是必有 $\gcd(a,b)=1$.

2. 证明如下结论：$m\geq ab$ 时，$ax+by=m$ 一定有自然数解.
证明： 由 $\gcd(a,b)=1$ 知，m，$m-a$，$m-2a$，$\cdots$，$m-(b-1)a$ 构成一个模 b 的完全剩余系（即模 b 两两不相等）. 于是其中必有一个为 b 的倍数，设为 $m-x\cdot a$（$0\leq x\leq b-1$ 且 x 为整数），再设 $m-ax=by$，由整除知 y 也为整数，只需证 $y\geq 0$. 事实上，$by=m-ax\geq ab-a(b-1)=a>0$，故 $b>0$，证毕.

3. 证明如下结论：$0\leq m<ab$ 时，$ax+by=m$ 至多只有一组自然数解.
证明： 否则，假设存在 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，使得 $ax_1+by_1=ax_2+by_2=m$，即 $a(x_1-a_2)=b(y_1-y_2)$. 于是 $a\mid b(y_1-y_2)$，又 $\gcd(a,b)=1$，故 $a\mid y_1-y_2$. 由 $by\leq m<ab$ 得 $y<a$，即 $0\leq y_1,y_2<a$，于是 $|y_1-y_2|\leq a-1$，只能有 $y_1-y_2=0$，即 $y_1=y_2$. 同理 $x_1=x_2$，因此 $ax+by=m$ 至多只有一组自然数解.

4. 由上知，$0\leq m<ab$ 时，能取得的 m 和满足 $0\leq ax+by<ab$ 的自然数组 (x,y) 一一对应，故只需求三角形区域
$$\begin{cases}0\leq ax+by<ab\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$$
内的整点个数. 它的两倍等于矩形区域
$$\begin{cases}0\leq x\leq b\\ 0\leq y\leq a\end{cases}$$
内的整点个数减去其中在直线 $ax+by=ab$ 上的整点个数（只有 $(b,0)$ 和 $(0,a)$ 两个）. 如图所示：



于是不能取得的 m 有 $ab-\dfrac{(a+1)(b+1)-2}{2}=\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$ 个.

5. 令 $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}=35$，得

$$\begin{cases}a-1=70\\b-1=1\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}a-1=35\\b-1=2\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}a-1=14\\b-1=5\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}a-1=10\\b-1=7\end{cases}$$

. 排除 $\gcd(a,b)\neq 1$ 的情况可得：$a=71$，$b=2$ 或 $a=11$，$b=8$. 其中第二组解即为本题第一问.

上题证明了 $m\geq ab$ 时，$ax+by=m$ 一定有自然数解. 事实上，ab 并不是一个最佳值. 我们有如下结论：

例 2. a 和 b 为正整数，且 $\gcd(a,b)=1$. 试证：当 $m>ab-a-b$ 时，二元一次不定方程 $ax+by=m$ 有自然数解；$m=ab-a-b$ 时，则不然.

证明： 首先，证方程 $ax+by=m$ 当 $m>ab-a-b$ 时有非负整数解.

方程的一切整数解为

$$\begin{cases} x=x_0+bt \\ y=y_0-at \end{cases}$$

(t 为任意整数).

取整数 t，使 $0\leq y=y_0-at<a$（这样的 t 一定存在，因为 $at\leq y_0<(a+1)t$），即 $0\leq y=y_0-at\leq a-1$. 对此 t，将相应的 x 代入 $ax+by=m$ 中，有

$$\begin{aligned} ax=&a\left(x_0+bt\right)=m-b\left(y_0-at\right) \\ >&ab-a-b-b(a-1)=-a. \end{aligned}$$

而 $a>0$，故 $x=x_0+bt>-1$，即 $x\geq 0$. 这就证明了当 $m>ab-a-b$ 时，方程 $ax+by=m$ 有自然解.

其次，证 $m=ab-a-b$ 时方程 $ax+by=m$ 无自然数解.

若不然，即方程 $ax+by=m$ 有解 $x\geq 0, y\geq 0$，则由 $ax+by=ab-a-b$，得 $a(x+1)+b(y+1)=ab$. 因 $\gcd(a,b)=1$，故 $a\mid y+1, b\mid x+1$，从而 $y+1\geq a, x+1\geq b$. 从而 $ab=a(x+1)+b(y+1)\geq 2ab$. 这和 a，b 为正整数矛盾，所以结论成立.

对于三元一次不定方程，也有类似的结论：

> **例 3.** 设 a，b，c 是正整数，$\gcd(a,b,c)=1$，又设 $\gcd(a,b)=d$. 证明：当 $n>\dfrac{ab}{d}+cd-a-b-c$ 时，方程 $ax+by+cz=n$ 有自然数解.

更一般的情况如下题：

> **例 4.** 设 p_1，p_2，$\cdots$，p_n 是 $n(\geq 2)$ 个两两互素的正整数，记 $\pi_i=\dfrac{p_1p_2\cdots p_n}{p_i}$，$i=1,2,\cdots,n$. 求最大的正整数 m，使得不定方程
>
> $$\pi_1x_1+\pi_2x_2+\cdots+\pi_nx_n=m$$
>
> 没有非负整数解.

以上题目来源：《命题人讲座——初等数论》冯志刚，第四讲.