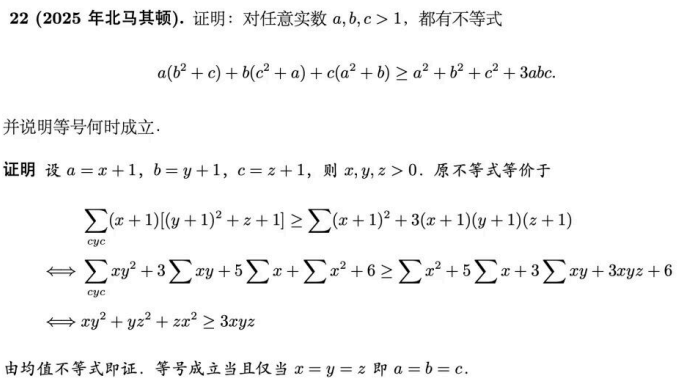
一分钟做不等式系列（5）——2025 年北马其顿

2025-02-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6ccebe8ed9572705

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



22 (2025 年北马其顿). 证明：对任意实数 $a,b,c>1$，都有不等式

$$a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b)\geq a^2+b^2+c^2+3abc.$$

并说明等号何时成立.

证明 设 $a=x+1$，$b=y+1$，$c=z+1$，则 $x,y,z>0$. 原不等式等价于

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}(x+1)[(y+1)^2+z+1]\geq\sum(x+1)^2+3(x+1)(y+1)(z+1)\\ \Longleftrightarrow\ &\sum_{cyc}xy^2+3\sum xy+5\sum x+\sum x^2+6\geq\sum x^2+5\sum x+3\sum xy+3xyz+6\\ \Longleftrightarrow\ &xy^2+yz^2+zx^2\geq 3xyz\end{aligned}$$

由均值不等式即证. 等号成立当且仅当 $x=y=z$ 即 $a=b=c$.

看到大于 1 的条件想到换元就秒了，这次是真 · 一分钟。