用物理方法做一道四川预赛的概率问题

2026-05-26　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6cf9bb823b519527

题目：

设多边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 为一个正八边形，有 2 只兔子最初分别位于顶点 A_4 和 A_8 处. 每过 1 分钟，2 只兔子同时随机、独立地跳到与其当前位置相邻的两个顶点中的一个. 一旦 2 只兔子跳到了同一个顶点，则停止跳跃. 则当兔子停止跳跃时，跳跃时间的分钟数的期望是_____.

2026四川-高中联赛预赛-第7题 >

解答（PDF 中已展开）

解答：

（1）考虑两只兔子的相对运动，问题可以简化为：

开始两只兔子距离为 4，一只兔子静止. 每过一分钟，另一只有 $\frac{1}{2}$ 的概率静止，$\frac{1}{4}$ 的概率向左跳动 2，$\frac{1}{4}$ 的概率向右跳动 2.

也可再次简化为：

开始一只兔子在正方形的一个顶点上，每过一分钟，兔子有 $\frac{1}{2}$ 的概率跳到左边相邻顶点，有 $\frac{1}{2}$ 的概率跳到右边相邻顶点. 求兔子首次跳到初始位置的相对顶点时，跳跃时间的期望.（最后乘 2）

（2）事实上，简单图上的随机游走可以等价于一个电阻网络.（这里不详细介绍，大家可以看 https://dl.ccf.org.cn/video/videoDetail.html?_ack=1&id=7542413343115264 内的视频，或查找相关资料了解）

核心在于马尔可夫过程的转移矩阵和电阻网络的拉普拉斯矩阵的联系.

- 随机游走的转移矩阵：$P = D^{-1}A$（D 是度数对角矩阵，A 是邻接矩阵）
- 电阻网络的拉普拉斯矩阵：$L = D - A$

两者满足关系 $L = D(I - P)$.

这意味着它们的调和函数、边界值问题、特征值等性质一一对应. 随机游走的概率方程和电路的电压电流方程，本质上都是拉普拉斯方程的不同表现形式.

一般结论：

对任意连通无向图 G，从顶点 s 到 t 再返回 s 的往返期望时间满足

$E[T_{s\to t}| + E|T_{t\to s}| = 2mR_{st}$

其中 m 为 G 的边数，设每一条边的电阻为 1，R_{st} 为 s,t 之间的等效电阻.

如果 s,t 在 G 中是对称的（如本题的正方形相对顶点），则

$E[T_{s\to t}| = E|T_{t\to s}| = mR_{st}$

对于本题，$m=4$，$R_{st} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$，故 $E[T_{s\to t}| = 4$，原题答案为 8.