2024 年土耳其国家队选拔考试

2024-03-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6d738fe6afc14488

2024 年土耳其国家队选拔考试

程国根 译

第一天

1. 在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，O 为外心. 直线 AI 和 $\triangle ABC$ 的外接圆另一个交点为 P. 过 I 且垂直于 AI 的直线交 BC 于点 X，点 X 在 OI 上的射影为 Y. 求证：A, P, X, Y 四点共圆.

2. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意实数 x, y，都有

$$f(x+y)^3 = (x+2y)f(x^2) + f(f(y))(x^2+3xy+y^2).$$

3. 对一个 12 元集合 S，至多有多少个有序数对 (a, b)，满足 $a, b \in S$ 且 $\dfrac{b}{a}$ 为素数?

1

第二天

4. 求所有正整数对 (a,b)，使得 $\dfrac{10^{a!}-3^b+1}{2^a}$ 是一个完全平方数.

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，H 为垂心，G 为重心. 设点 A_b 和 A_c 分别在 AB 和 AC 上，满足 B,C,A_b,A_c 四点共圆，且 A_b,A_c,H 三点共线. 设 O_a 为 $\triangle AA_bA_c$ 的外心，类似可定义点 O_b,O_c. 求证：$\triangle O_aO_bO_c$ 的重心在直线 HG 上.

6. 对正整数 n 和正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，定义 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 如下：$b_k=a_k+\max(a_{k+1}+a_{k+2})$，$1\le k\le n$（下标均模 n 理解）. 求 λ 的最小值，使得对任意 n 和 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，都有

$$\lambda\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^{2024}\right]\ge\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i+1})^{2024}.$$

2

第三天

7. 设正整数 $r \geq 2$，将每个正整数染成 r 种不同颜色之一．已知：对任意正整数 n 和每一对颜色 a, b，在 n 的所有正约数中，被染为颜色 a 的约数个数和被染为颜色 b 的约数个数之差不超过 1．求 r 的所有可能值．

8. 对正整数 n，定义 $\sigma(n)$ 为 n 的所有正约数之和．正整数数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 定义如下：$a_0 = 1$，对任意 $n \geq 1$，a_n 是满足条件

$$\sigma(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) | \sigma(a_0 a_1 \ldots a_n),$$

且大于 1 的最小正整数．求数列中 2024^{2024} 的约数个数．

9. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，O 为外心．直线 IO 和三边 BC, CA, AB 所在直线分别交于点 D, E, F．设 BE 和 CF 交于点 A_1，类似定义点 B_1, C_1．设 $\triangle ABC$ 的内切圆与三边 BC, CA, AB 的切点分别为 X, Y, Z，直线 XA_1, YB_1, ZC_1 和 IO 分别交于点 A_2, B_2, C_2．求证：以 AA_2, BB_2, CC_2 为直径的圆有一个公共点．

2024 年土耳其国家队选拔考试

程国根　译

第一天

1. 在 $\triangle ABC$中，I为内心，O为外心．直线 AI和 $\triangle ABC$的外接圆另一个交点为 P．过 I且垂直于 AI的直线交 BC于点 X，点 X在 OI上的射影为 Y．求证：A,P,X,Y四点共圆．

2. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数 x,y，都有 $$f(x+y)^3=(x+2y)f(x^2)+f(f(y))(x^2+3xy+y^2).$$

3. 对一个 12元集合 S，至多有多少个有序数对 (a,b)，满足 $a,b\in S$且 $\frac{b}{a}$为素数?

第二天

4. 求所有正整数对 (a,b)，使得 $\frac{10^{a!}-3^{b}+1}{2^{a}}$是一个完全平方数.

5. 在锐角 $\triangle ABC$中，H为垂心，G为重心. 设点 A_{b}和 A_{c}分别在 AB和 AC上，满足 B,C,A_{b},A_{c}四点共圆，且 A_{b},A_{c},H三点共线. 设 O_{a}为 $\triangle AA_{b}A_{c}$的外心，类似可定义点 O_{b},O_{c}. 求证：$\triangle O_{a}O_{b}O_{c}$的重心在直线 HG上.

6. 对正整数 n和正实数 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，定义 $b_{1},b_{2},\cdots,b_{n}$如下：$b_{k}=a_{k}+\max(a_{k+1}+a_{k+2})$，$1\le k\le n$（下标均模 n理解）. 求λ的最小值，使得对任意 n和 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，都有 $$\lambda \left[\sum_{i=1}^n(a_i-a_{i+1})^{2024} \right] \geq \sum_{i=1}^n(b_i-b_{i+1})^{2024}.$$

第三天

7. 设正整数 $r\ge 2$，将每个正整数染成 r种不同颜色之一. 已知：对任意正整数 n和每一对颜色 a,b，在 n的所有正约数中，被染为颜色 a的约数个数和被染为颜色 b的约数个数之差不超过 1. 求 r的所有可能值.

8. 对正整数 n，定义 $\sigma(n)$为 n的所有正约数之和. 正整数数列 $(a_{n})_{n=0}^{\infty}$定义如下：$a_{0}=1$，对任意 $n\ge 1$，a_{n}是满足条件 $$\sigma{(a_0a_1\dots a_{n-1})} \vert \sigma{(a_0a_1\dots a_{n})},$$且大于 1的最小正整数. 求数列中 2024^{2024}的约数个数.

9. 在锐角 $\triangle ABC$中，I为内心，O为外心. 直线 IO和三边 BC,CA,AB所在直线分别交于点 D,E,F. 设 BE和 CF交于点 A_{1}，类似定义点 B_{1},C_{1}. 设 $\triangle ABC$的内切圆与三边 BC,CA,AB的切点分别为 X,Y,Z，直线 XA_{1},YB_{1},ZC_{1}和 IO分别交于点 A_{2},B_{2},C_{2}. 求证：以 AA_{2},BB_{2},CC_{2}为直径的圆有一个公共点.

解答（PDF 中已展开）

\section*{2024年土耳其国家队选拔考试}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\section*{第一天}\ex 在$\triangle ABC$中，I为内心，O为外心．直线AI和$\triangle ABC$的外接圆另一个交点为P.
过I且垂直于AI的直线交BC于点X，点X在OI上的射影为Y．求证：A,P,X,Y四点共圆．\vfill\ex
求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数$x,y$，都有$$f(x+y)^3=(x+2y)f(x^2)+f(f(y))(x^2+3xy+y^2).$$\vfill\ex
对一个12元集合S，至多有多少个有序数对(a,b)，满足$a,b\in S$且$\frac{b}{a}$为素数？\vfill\section*{第二天}\ex
求所有正整数对(a,b)，使得$\frac{10^{a!}-3^{b}+1}{2^{a}}$是一个完全平方数．\vfill\ex 在锐角$\triangle ABC$中，
H为垂心，G为重心．设点A_{b}和A_{c}分别在AB和AC上，满足B,C,A_{b},A_{c}四点共圆，
且A_{b},A_{c},H三点共线．设O_{a}为$\triangle AA_{b}A_{c}$的外心，类似可定义点O_{b},O_{c}．求证：$\triangle O_{a}O_{b}O_{c}$的重心在直线$HG$上．\vfill\ex 对正整数$n$和正实数$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，
定义$b_{1},b_{2},\cdots,b_{n}$如下：$b_{k}=a_{k}+\max(a_{k+1}+a_{k+2})$，$1\le k\le n$（下标均模$n$理解）．
求λ的最小值，使得对任意n和$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，都有$$\lambda \left[\sum_{i=1}^n(a_i-a_{i+1})^{2024} \right] \geq \sum_{i=1}^n(b_i-b_{i+1})^{2024}.$$\vfill\section*{第三天}\ex 设正整数$r\ge 2$，
将每个正整数染成r种不同颜色之一．已知：对任意正整数n和每一对颜色a,b，在n的所有正约数中，
被染为颜色a的约数个数和被染为颜色b的约数个数之差不超过1．求r的所有可能值．\vfill\ex 对正整数n，
定义$\sigma(n)$为n的所有正约数之和．正整数数列$(a_{n})_{n=0}^{\infty}$定义如下：$a_{0}=1$，对任意$n\ge 1$，
a_{n}是满足 条件$$\sigma{(a_0a_1\dots a_{n-1})} \vert \sigma{(a_0a_1\dots a_{n})},$$且大于1的最小正整数．
求数列中2024^{2024}的约数个数．\vfill\ex 在锐角$\triangle ABC$中，I为内心，O为外心．
直线IO和三边BC,CA,AB所在直线分别交于点D,E,F．设BE和CF交于点A_{1}，类似定义点B_{1},C_{1}．
设$\triangle ABC$的内切圆与三边BC,CA,AB的切点分别为X,Y,Z，
直线XA_{1},YB_{1},ZC_{1}和IO分别交于点A_{2},B_{2},C_{2}．求证：
以AA_{2},BB_{2},CC_{2}为直径的圆有一个公共点．\vfill