数学竞赛每日一练第 7 期解答

2021-06-10 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6de56f9932bd7b4d

定义函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，$\forall x,y\in\mathbb{Z}$ 有

$$f(x^2-3y^2)+f(x^2+y^2)=2(x+y)f(x-y).$$

若 $n>0$ 则 $f(n)>0$，并且 $f(2015)\cdot f(2016)$ 是完全平方数，试求 $f(1)+f(2)$ 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答将方程中的 y 替换为 $-y$ 有

$$f(x^2-3y^2)+f(x^2+y^2)=2(x-y)f(x+y)$$

结合原方程有

$$(x-y)f(x+y)=(x+y)f(x-y)$$

这表明 $a\neq b$，且 $2\mid a-b$ 时，有

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}$$

于是存在常数 $\alpha=f(1)\in\mathbb{Z}_+$，$\beta=f(2)\in\mathbb{Z}_+$，使得

$$f(n)=\begin{cases}n\cdot\alpha,2\nmid n\\ \dfrac{n}{2}\cdot\beta,2\mid n\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}&f(2015)\cdot f(2016)\\=&2015\alpha\cdot 1008\beta\\=&2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 31\alpha\beta\end{aligned}$$

为完全平方数，故

$$\alpha\beta=5\cdot 7\cdot 13\cdot t^2,t\in\mathbb{Z}_+$$

容易证明当 $\alpha=5\cdot 31$，$\beta=7\cdot 13$，$t=1$ 时，$\alpha+\beta$ 取得最小值 246.

且函数

$$f(n)=\begin{cases}91n, 2\nmid n\\ \dfrac{155}{2}n, 2\mid n\end{cases}$$

满足 $f(1)+f(2)=246$.

故 $f(1)+f(2)$ 的最小值为 246.