Fan 不等式相关问题的整理

2021-11-29 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6ed13c7b5f2e401c

最近在各个微信群里看到了一些不等式，都和 Fan 不等式有关．本文简单地做个整理：

设 $b_i \in \mathbb{R}$，$i=1$，2，$\cdots$，n，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 0$．则

$$\sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1} \leqslant \cos\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

其中 $b_{n+1} = b_1$.

这个不等式的证明可以参考韩京俊的《初等不等式的证明方法》一书，用的是拉格朗日乘子法，这里做个搬运.

证明当 $b_i = 0$（$i=1$，2，$\cdots$，n）时，原不等式显然成立．我们只需考虑 $b_i \neq 0$ 的情形.

由齐次性，我们不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 = 1$ （注意这里已经有关于 b_i 的约束条件，想一下怎样的约束条件，这里能不妨设?）．我们来求 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i b_{i+1}$ 的最大值，作 Lagrange 函数

$$F = \sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + \mu\sum_{i=1}^{n}\left(1 - b_i^2\right)$$

我们再设 $b_{n+1} = b_1$，$b_0 = b_n$，由条件极值的必要条件有

$$b_{i-1} + b_{i+1} + \lambda - 2\mu b_i = 0, i = 1, \cdots, n$$

将这 n 个式子相加，得 $\lambda = 0$，从而

$$(b_2 - kb_1) = m\,(b_1 - kb_n) = m^n\,(b_2 - kb_1)$$

其中 $mk = 1$，$m + k = 2\mu$．若 $b_2 - kb_1 = 0$，那么 $b_{i+1} - kb_i = 0 (i = 1,\ \cdots,\ n)$，从而

$$b_1 = k^n b_1 \Rightarrow k^n = 1 \Rightarrow k = \cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}$$

若 $b_2 - kb_1 \neq 0$，那么

$$m^n = 1 \Rightarrow m = \cos\frac{2i\pi}{n} + i\sin\frac{2i\pi}{n}$$

而

$$m + \frac{1}{m} = k + \frac{1}{k} = 2\mu \Rightarrow \mu = \cos\frac{2t\pi}{n}$$

由于此时 b_i 的取值集合为紧集，故 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_ib_{i+1}$ 必能取到最大值，取到最大值时有

$$\begin{aligned}
&b_{i-1}+b_{i+1}+\lambda-2\mu b_i=0\\
\Rightarrow&b_i\left(b_{i-1}+b_{i+1}+\lambda-2\mu b_i\right)=0\\
\Rightarrow&\sum_{i=1}^{n} b_ib_{i+1}=\mu
\end{aligned}$$

注意 $t\neq 0$，否则 $m=k=1$，$b_i=0$ 矛盾，故

$$\mu=\cos\frac{2t\pi}{n}\leqslant\cos\frac{2\pi}{n}$$

当 $b_i=A\cos\dfrac{2i\pi}{n}+B\sin\dfrac{2i\pi}{n}$ 时 (其中 A，B 是任意实数)，$\mu=\cos\dfrac{2\pi}{n}$，从而命题得证.

这个方法比较高等，在高联中不能直接使用. 事实上，用待定系数法直接凑均值不等式就能证明了. 引入参数 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n，使得

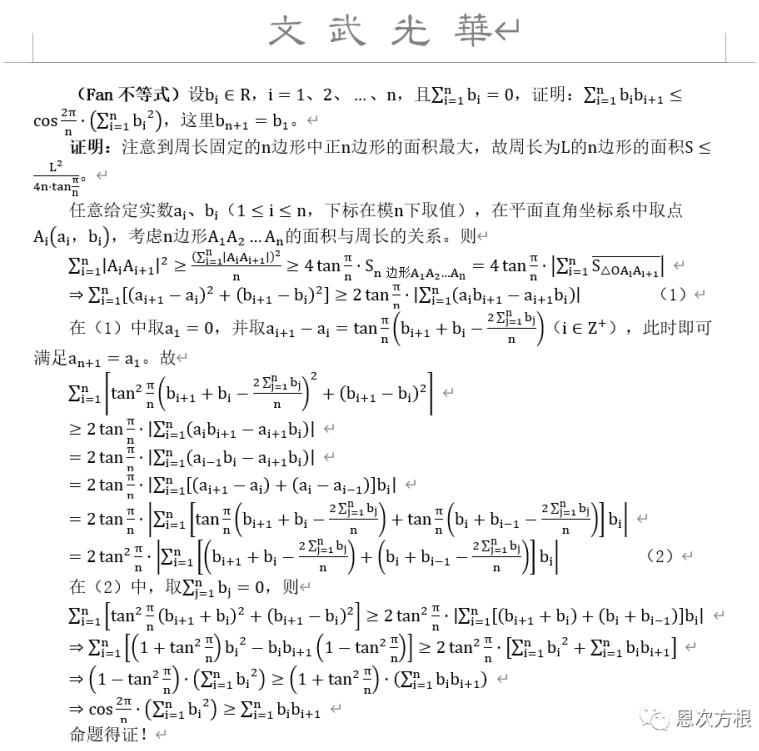
$$\begin{aligned}
2a_1a_2&\leq\lambda_1a_1^2+\frac{1}{\lambda_1}a_2^2\\
2a_2a_3&\leq\lambda_2a_2^2+\frac{1}{\lambda_2}a_3^2\\
&\cdots\cdots\\
2a_na_1&\leq\lambda_na_n^2+\frac{1}{\lambda_n}a_1^2
\end{aligned}$$

为使得系数一致，参数需要满足

$$\frac{1}{\lambda_1}+\lambda_2=\frac{1}{\lambda_2}+\lambda_3=\cdots=\frac{1}{\lambda_n}+\lambda_1$$

即为一道初联代数题的推广一文中的等式，也可以参考申强老师的文章强行封闭成一个圈.

此外，田开斌老师有一个非常巧妙的证法，见http://s2.sinaimg.cn/orignal/003oMgnOzy7KK2yVpAtd1


文 武 先 華

（Pan 不等式）设$b_i \in R$，$i = 1$、2、…、n，且$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$，证明：$\sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1} \leq \cos\frac{2\pi}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$，这里$b_{n+1} = b_1$。

证明：注意到周长固定的n边形中正n边形的面积最大，故周长为L的n边形的面积$S \leq \frac{L^2}{4n \cdot \tan\frac{\pi}{n}}$。

任意给定实数a_i、b_i（$1 \leq i \leq n$，下标在模n下取值），在平面直角坐标系中取点$A_i(a_i, b_i)$，考虑n边形$A_1A_2 \ldots A_n$的面积与周长的关系。则

$\sum_{i=1}^{n}|A_iA_{i+1}|^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n}|A_iA_{i+1}|)^2}{n} \geq 4\tan\frac{\pi}{n} \cdot S_{n\text{边形}A_1A_2\ldots A_n} = 4\tan\frac{\pi}{n} \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{S_{\triangle OA_iA_{i+1}}}\right|$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}[(a_{i+1} - a_i)^2 + (b_{i+1} - b_i)^2] \geq 2\tan\frac{\pi}{n} \cdot |\sum_{i=1}^{n}(a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i)|$ （1）

在（1）中取$a_1 = 0$，并取$a_{i+1} - a_i = \tan\frac{\pi}{n}\left(b_{i+1} + b_i - \frac{2\sum_{j=1}^{n} b_j}{n}\right)$（$i \in Z^+$），此时即可满足$a_{n+1} = a_1$。故

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\tan^2\frac{\pi}{n}\left(b_{i+1} + b_i - \frac{2\sum_{j=1}^{n} b_j}{n}\right)^2 + (b_{i+1} - b_i)^2\right]$$

$$\geq 2\tan\frac{\pi}{n} \cdot |\sum_{i=1}^{n}(a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i)|$$

$$= 2\tan\frac{\pi}{n} \cdot |\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}b_i - a_{i+1}b_i)|$$

$$= 2\tan\frac{\pi}{n} \cdot |\sum_{i=1}^{n}[(a_{i+1} - a_i) + (a_i - a_{i-1})]b_i|$$

$$= 2\tan\frac{\pi}{n} \cdot \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\tan\frac{\pi}{n}\left(b_{i+1} + b_i - \frac{2\sum_{j=1}^{n} b_j}{n}\right) + \tan\frac{\pi}{n}\left(b_i + b_{i-1} - \frac{2\sum_{j=1}^{n} b_j}{n}\right)\right]b_i\right|$$

$$= 2\tan^2\frac{\pi}{n} \cdot \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\left(b_{i+1} + b_i - \frac{2\sum_{j=1}^{n} b_j}{n}\right) + \left(b_i + b_{i-1} - \frac{2\sum_{j=1}^{n} b_j}{n}\right)\right]b_i\right| \quad (2)$$

在（2）中，取$\sum_{j=1}^{n} b_j = 0$，则

$\sum_{i=1}^{n}\left[\tan^2\frac{\pi}{n}(b_{i+1} + b_i)^2 + (b_{i+1} - b_i)^2\right] \geq 2\tan^2\frac{\pi}{n} \cdot |\sum_{i=1}^{n}[(b_{i+1} + b_i) + (b_i + b_{i-1})]b_i|$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 + \tan^2\frac{\pi}{n}\right)b_i^2 - b_ib_{i+1}\left(1 - \tan^2\frac{\pi}{n}\right)\right] \geq 2\tan^2\frac{\pi}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_ib_{i+1}\right]$

$\Rightarrow \left(1 - \tan^2\frac{\pi}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(1 + \tan^2\frac{\pi}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_ib_{i+1}\right)$

$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \sum_{i=1}^{n} b_ib_{i+1}$

命题得证！

恩次方根

用同样的方法，可以证明如下不等式：

设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为正实数，$n \geq 2$，则

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_ia_{i+1} \leq \cos\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

这两个不等式的关系在强行封闭成一个圈一文中也进行了详细的说明，这里不再赘述.

文章最后放一些类似问题.

1. x_1，x_2，$\cdots$，$x_n \in \mathbb{R}$，求证：

$$\frac{x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)}$$

1. x_1，x_2，$\cdots$，$x_n \in \mathbb{R}$，求证：

$$\frac{x_2^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 \cdots + (x_{n-2} + x_n)^2 + x_{n-1}^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq 4\cos^2\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

1. (**2013 年罗马尼亚 TST**)x_1，x_2，$\cdots$，$x_n \in \mathbb{R}_+$，求证：

$$\begin{aligned}&\min\left\{x_1,\frac{1}{x_1}+x_2,\cdots,\frac{1}{x_{n-1}}+x_n,\frac{1}{x_n}\right\}\\\leq&2\cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)\\\leq&\max\left\{x_1,\frac{1}{x_1}+x_2,\cdots,\frac{1}{x_{n-1}}+x_n,\frac{1}{x_n}\right\}\end{aligned}$$

1. (**新星**) 给定正整数 $n\geq 2$，求最小的实数 c，使得对任意非负实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，都存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，满足 $x_{i-1}+x_{i+1}\leq cx_i$，其中 $x_0=x_{n+1}=0$.

注：题 3，4 其实都是题 2 的包装，题 3 经过换元后得到题 4，题 4 本质上即要证题 2.