2024 年波罗的海之路数学竞赛

2024-12-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6f49b83b745b2575

原文是图片版（公式与题面都在图里）；上面这段文字由本站按配套 LaTeX 文库的.tex 源码逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏。它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

2024 年波罗的海之路数学竞赛

程国根　译

1. 设 α 为非零实数. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有

$$xf(x+y)=(x+\alpha y)f(x)+xf(y).$$

2. 求所有函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得对任意满足 $abc=1$ 的正实数 a,b,c，都有

$$\frac{f(a)}{1+a+ca}+\frac{f(b)}{1+b+ab}+\frac{f(c)}{1+c+bc}=1.$$

3. 黑板上写有正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2024}$. 在每一次操作中，可以选择黑板上的两个数 x,y，擦去它们并写上 $\dfrac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$. 在 2023 次操作后，黑板上只剩下一个数，记这个数为 c. 求证：无论如何操作，都有

$$c<2024(a_1+a_2+\cdots+a_{2024}).$$

4. 求最大的实数 α，使得对任意 $x,y,z\geq 0$，都有

$$(x+y+z)^3+\alpha(x^2z+y^2x+z^2y)\geq\alpha(x^2y+y^2z+z^2x).$$

5. 求所有正实数 λ，使得若数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$a_{n+1}=\lambda\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\forall n\geq 2024^{2024},$$

则 $\{a_n\}$ 有界.

1

6. 迷宫是由 2024 个洞穴和 2023 条互不相交（双向）的通道构成的系统，每条通道恰好连接两个洞穴，并且每对洞穴都能通过一系列通道相连通。
起初，Erik 站在连接某两个洞穴的一条通道上。在一次移动中，他可以穿过其中一个洞穴进入另一条连接该洞穴与第三个洞穴的通道。然而，当他这样做时，他刚刚所在的通道会神奇地消失，并被一条新通道取代，新通道连接他新进入的通道的末端与他原来所在通道的起始端（也就是说，如果 Erik 原本在连接洞穴 a 和 b 的通道上，然后他穿过洞穴 b 进入到连接洞穴 b 和 c 的通道，那么洞穴 a 和 b 之间的通道将会消失，而一条连接洞穴 a 和 c 的新通道将会出现）。
由于 Erik 喜欢设计迷宫，并且心里已经有了下一个迷宫的特定布局，他想知道是否能够通过这些移动操作将这个迷宫转变成他心里所想的布局。证明：无论原始布局以及他在其中的起始位置如何，这都是有可能做到的。

7. 将 45×45 方格表的中心方格挖去．求所有正整数 n，使得能将此图形用若干个 $1 \times n$ 和 $n \times 1$ 的矩形不重叠地完全覆盖．

8. 正整数 a, b, n 满足 $a + b \leq n^2$．Alice 和 Bob 在一个 $n \times n$ 的未染色方格表中进行如下游戏：

- 首先，Alice 将 a 个小方格染成绿色；
- 其次，Bob 将 b 个未染色的小方格染成蓝色．

若 Alice 能找到一条从方格表左下角到右上角的未被染成蓝色的连通路径（指连续两个方格均有相邻的边），则 Alice 获胜；反之 Bob 获胜．讨论谁有必胜策略．

2

9. 设 S 为有限集．对正整数 n，若存在映射 $g : S \to S$，使得

$$f(x) = \underbrace{g(g(\ldots g(x)\ldots))}_{\text{n个g}}, \forall x \in S$$

则称映射 $f : S \to S$ 是 n 次的．已知映射 $f : S \to S$ 是 n 次的，是否对任意 $x \in S$，都有 $f(f(x)) = f(x)$?

10. 一只青蛙位于无限大网格中的一个单位方格上。青蛙的移动方式是朝着它所面向的方向跳跃一格或两格，然后按照以下规则转弯：

(i) 如果青蛙跳跃一格，那么它接着向右转 90 度；

(ii) 如果青蛙跳跃两格，那么它接着向左转 90 度。

如果青蛙最初面向以下方向，经过有限次移动后，它是否有可能到达初始方格正北方恰好 2024 格处呢：

(a) 北方；

(b) 东方?

11. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$AC \perp BD$．点 X, Y 在 $\triangle BOD$ 的外接圆上，且满足 $\angle AXO = \angle CYO = 90°$．点 M 为 AC 的中点．求证：BD 和 $\triangle MXY$ 的外接圆相切．

12. 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，$AB < AC$．点 M 为 ω 上弧 BAC 的中点，ω 上异于 M 的另一点 X 满足 $AX = AM$．在边 AC, AB 上分别取点 E, F，使得 $EX = EC$，$FX = FB$．求证：$AE = AF$．

13. 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H．点 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆的外部，且满足 $\angle ABD = \angle DCA$．AB 关于 BD 的对称直线交 CD 于点 X，AC 关于 CD 的对称直线交 BD 于点 Y．过 X 作 AC 的垂线，过 Y 作 AB 的垂线，交于点 P．求证：D, P, H 三点共线．

14. 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，三条高 AD, BE, CF 交于点 H．在直线 EF 上取点 K，使得 $KH \parallel BC$．求证：点 H 关于 KD 的对称点在 ω 上．

15. 平面上有 N 个点（$N \geq 3$），其中任意三点不共线．称三点 A, B, C 是一个波罗的海三点组，如果其余点都不在 $\triangle ABC$ 的外接圆上．已知至少有一个波罗的海三点组，求证：至少有 $\dfrac{N}{3}$ 个波罗的海三点组．

16. 求所有正合数 n，使得对 n 的每个正约数 d，都存在整数 $k \geq 0$ 和 $m \geq 2$，满足 $d = k^m + 1$.

17. 是否存在无穷多个四元正整数组 (a, b, c, d)，使得 $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$，且 $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ 为素数?

18. 无穷正整数列 $a_1, a_2, \cdots$ 满足:对任意正整数 n,都有 $a_n \geq 2$，且 a_{n+2} 整除 $a_{n+1} + a_n$. 求证：存在一个素数 p，使得 p 能整除数列中的无穷多项.

19. 是否存在正整数 N，使得 N 有至少 2024 个不同的素因子，且 N 的全体正约数 $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = N$ 满足

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \cdots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

是一个整数?

20. 正整数 a, b, c 满足方程组

$$\begin{cases} (ab-1)^2 = c(a^2+b^2) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

(1) 求证：$c+1$ 为完全平方数.

(2) 求所有满足条件的三元正整数组 (a, b, c).

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 1. 设 α 为非零实数。求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $xf(x+y)=(x+\alpha y)f(x)+xf(y)$.
2. 2. 求所有函数 $f:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$，使得对任意满足 $abc=1$ 的正实数 a,b,c，都有 $\frac{f(a)}{1+a+ca}+\frac{f(b)}{1+b+ab}+\frac{f(c)}{1+c+bc}=1$.
3. 3. 黑板上写有正实数 $a_1,a_2,\dots,a_{2024}$。在每一次操作中，可以选择黑板上的两个数 x,y，擦去它们并写上 $\frac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$。在 2023 次操作后，黑板上只剩下一个数，记这个数为 c。求证：无论如何操作，都有 $c<2024(a_1+a_2+\dots+a_{2024})$.
4. 4. 求最大的实数 α，使得对任意 $x,y,z\ge 0$，都有 $(x+y+z)^3+\alpha(x^2z+

y^2x+z^2y)\ge \alpha(x^2y+y^2z+z^2x)$.

5. 5. 求所有正实数 λ，使得若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\lambda\cdot\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$（对任意 $n\ge 2024^{2024}$），则 $\{a_n\}$ 有界。
6. 6. 迷宫是由 2024 个洞穴和 2023 条互不相交（双向）的通道构成的系统，每条通道恰好连接两个洞穴，并且每对洞穴都能通过一系列通道相连通。起初，Erik 站在连接某两个洞穴的一条通道上。在一次移动中，他可以穿过其中一个洞穴进入另一条连接该洞穴与第三个洞穴的通道。然而，当他这样做时，他刚刚所在的通道会神奇地消失，并被一条新通道取代，新通道连接他新进入的通道的末端与他原来所在通道的起始端（也就是说，如果 Erik 原本在连接洞穴 a 和 b 的通道上，然后他穿过洞穴 b 进入到连接洞穴 b 和 c 的通道，那么洞穴 a 和 b 之间的通道将会消失，而一条连接洞穴 a 和 c 的新通道将会出现）。由于 Erik 喜欢设计迷宫，并且心里已经有了下一个迷宫的特定布局，他想知道是否能够通过这些移动操作将这个迷宫转变成他心里所想的布局。证明：无论原始布局以及他在其中的起始位置如何，这都是有可能做到的。
7. 7. 将 45×45 方格表的中心方格挖去。求所有正整数 n，使得能将此图形用若干个 $1\times n$ 和 $n\times 1$ 的矩形不重叠地完全覆盖。
8. 8. 正整数 a,b,n 满足 $a+b\le n^2$。Alice 和 Bob 在一个 $n\times n$ 的未染色方格表中进行如下游戏：(i) 首先，Alice 将 a 个小方格染成绿色；(ii) 其次，Bob 将 b 个未染色的小方格染成蓝色。若 Alice 能找到一条从方格表左下角到右上角的未被染成蓝色的连通路径（指连续两个方格均有相邻的边），则 Alice 获胜；反之 Bob 获胜。讨论谁有必胜策略。
9. 9. 设 S 为有限集。对正整数 n，若存在映射 $g:S\to S$，使得对任意 $x\in S$，把 g 迭代 n 次后恰好得到 $f(x)$（即 $f=\underbrace{g\circ g\circ\cdots\circ g}_{n\ \text{factors}}$），则称映射 $f:S\to S$ 是 n 次的。已知映射 $f:S\to S$ 是 n 次的，是否对任意 $x\in S$，都有 $f(f(x))=f(x)$?
10. 10. 一只青蛙位于无限大网格中的一个单位方格上。青蛙的移动方式是朝着它所面向的方向跳跃一格或两格，然后按照以下规则转弯：(i) 如果青蛙跳跃一格，那么它接着向右转 90°；(ii) 如果青蛙跳跃两格，那么它接着向左转 90°。如果青蛙最初面向以下方向，经过有限次移动后，它是否有可能到达初始方格正北方恰好 2024 格处呢：(a) 北方；(b) 东方?
11. 11. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$AC\perp BD$。点 X,Y 在 $\triangle BOD$ 的外接圆上，且满足 $\angle AXO=\angle CYO=90^{\circ}$。点 M 为 AC 的中点。求证：BD 和 $\triangle MXY$ 的外接圆相切。
12. 12. 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，$AB<AC$。点 M 为 ω 上弧 BAC 的中点，ω 上异于 M 的另一点 X 满足 $AX=AM$。在边 AC,AB 上分别取点 E,F，使得 $EX=EC$，$FX=FB$。求证：$AE=AF$。
13. 13. 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H。点 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆的外部，且满足 $\angle ABD=\angle DCA$。AB 关于 BD 的对称直线交 CD 于点 X，AC 关于 CD 的对称直线交 BD 于点 Y。过 X 作 AC 的垂线，过 Y 作 AB 的垂线，交于点 P。求证：D,P,H 三点共线。
14. 14. 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，三条高 AD,BE,CF 交于点 H。在

直线 EF 上取点 K，使得 $KH\parallel BC$。求证：点 H 关于 KD 的对称点在 ω 上。

15. 15. 平面上有 N 个点（$N\ge 3$），其中任意三点不共线。称三点 A,B,C 是一个波罗的海三点组，如果其余点都不在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。已知至少有一个波罗的海三点组，求证：至少有 $\frac{N}{3}$ 个波罗的海三点组。
16. 16. 求所有正合数 n，使得对 n 的每个正约数 d，都存在整数 $k\ge 0$ 和 $m\ge 2$，满足 $d=k^m+1$。
17. 17. 是否存在无穷多个四元正整数组 (a,b,c,d)，使得 $2\le d\le c\le b\le a\le d^{2024}$，且 $a^{a!}+b^{b!}-c^{c!}-d^{d!}$ 为素数?
18. 18. 无穷正整数列 $a_1,a_2,\dots$ 满足：对任意正整数 n，都有 $a_n\ge 2$，且 a_{n+2} 整除 $a_{n+1}+a_n$。求证：存在一个素数 p，使得 p 能整除数列中的无穷多项。
19. 19. 是否存在正整数 N，使得 N 有至少 2024 个不同的素因子，且 N 的全体正约数 $1=d_1<d_2<\dots<d_k=N$ 满足 $\frac{d_2}{d_1}+\frac{d_3}{d_2}+\dots+\frac{d_k}{d_{k-1}}$ 是一个整数?
20. 20. 正整数 a,b,c 满足方程组 $\begin{cases}(ab-1)^2=c(a^2+b^2)+ab+1,\\a^2+b^2=c^2+ab.\end{cases}$（1）求证：$c+1$ 为完全平方数。（2）求所有满足条件的三元正整数组 (a,b,c)。