2023 年阿里巴巴数学竞赛决赛最简单一题

2024-06-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_6f5b19b11bb23cf3

题目 1：（2023 年阿里巴巴数学竞赛决赛分析与方程赛道第 1 题）

考虑序列 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{a_n^2}{n^2}$，$a_1=\dfrac{2}{5}$. 证明对所有正整数 n 都有 $a_n<1$.

解答（PDF 中已展开）

证明：

由题意知：

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n+\frac{a_n^2}{n^2}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+n^2}$$

由于

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i+i^2}\\=&\frac{1}{a_1+1^2}+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{a_i+i^2}\\<&\frac{5}{7}+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i^2}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}-\frac{2}{7}\\<&\frac{\pi^2}{6}-\frac{2}{7}<\frac{10}{6}-\frac{2}{7}=\frac{29}{21}\\<&\frac{3}{2}\end{aligned}$$

于是对 $n\geq 2$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}=&\frac{1}{a_1}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i+i^2}\\=&\frac{5}{2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i+i^2}\\>&\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1\end{aligned}$$

即 $a_n<1$，$n\geq 2$，而 $a_1=\dfrac{2}{5}<1$，证毕.

注：也可以归纳证明：$a_n<1-\dfrac{1}{n}$，这样无需使用巴塞尔级数，是一个纯初等证明方法.

下面是两道类似题：

题目 2：（2001 年西部数学奥林匹克第 1 题）

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=x_n+\dfrac{x_n^2}{n^2}$，$n>1$. 求证：$x_{2001}<1000$.

注：本题可加强到 $x_n<\dfrac{3}{2}$.

题目 3：（2012 年西部数学奥林匹克第 6 题）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{a_n^2}{2012}$，$n\geq 0$. 求所有的整数 k，使得 $a_k<1<a_{k+1}$.