2023 年越南国家队选拔考试

2023-04-19　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7120f6fa2ac330ff

2023 年越南国家队选拔考试——中文翻译

第一天

1.一个学校里有 A 和 B 两个班，分别有 m 和 n 名学生．两个班的学生围成一圈，然后每个学生会得到一些糖果，糖果的数量等于该学生左边连续的同班同学的个数（若左边不为同班同学，则获得 0 颗糖果）．分发完糖果后，老师将所有学生进行分组，获得糖果数相同的学生被分到同一组，不同组的学生获得的糖果数不同．

(1) 一个小组最多可以有多少个学生?

(2) 除未获得糖果多小组外，一个小组最多可以有多少个学生?

2.给定三个函数

$$P(x)=(x^2-1)^{2023}, Q(x)=(2x+1)^{14}, R(x)=\left(2x+1+\frac{2}{x}\right)^{34}.$$

起初，选取其中两个函数构成一个集合，然后对此集合进行一系列操作，每次可以进行的操作如下：

- 选取两个函数 $p,q\in S$，将 $p+q,p-q,pq$ 之一加入 S 中；
- 选取一个函数 $p\in S$，将 p^k 加入 S 中，其中 k 为任意正整数；
- 选取一个函数 $p\in S$ 和一个实数 t，将 $p+t,p-t,pt$ 之一加入 S 中．

求证：不论起初 S 中的两个函数如何选择，都无法在有限次操作后，将第三个函数也加入 S 中．

3.设 $\triangle ABC$ 为不等边的锐角三角形，外接圆为 $\odot O$．BE,CF 为 $\triangle ABC$ 的两条高，垂心为 H．M 为 AH 中点，点 K 在 EF 上，且满足 $HK\perp EF$．一条不过点 A 且平行于 BC 的直线分别交 $\odot O$ 上的劣弧 AB,AC 于点 P,Q．求证：(CQE) 在点 E 处的切线，(BPF) 在点 F 处的切线，以及 MK，这三线共点．

2023 年越南国家队选拔考试——中文翻译

第二天

4.给定两个互质的正整数 a 和 b，其中 b 为奇数，$a>2$. 数列 $\{x_n\}$ 定义如下：$x_0=0$，$x_1=a$，对任意 $n\geq 1$，$x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$. 求证：

(1) 若 a 为偶数，则不存在正整数 m,n,p，使得 $\frac{x_m}{x_nx_p}$ 为正整数.

(2) 若 a 为奇数，则不存在正整数 m,n,p，使得 mnp 为偶数，且 $\frac{x_m}{x_nx_p}$ 为完全平方数.

5.在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle B<\angle A<90^\circ$. 设 I 为 AB 的中点，S 为 AD 和 BC 交点. R 为 $\triangle SAB$ 内一个动点，满足 $\angle ASR=\angle BSR$. 在直线 AR,BR 上分别取点 E,F，使得 BE,AF 均和 RS 平行. 设直线 EF 和 $\triangle SAB$ 的外接圆交于点 H,K. 在线段 AB 上取点 M,N，使得 $\angle AHM=\angle BHI$，$\angle BKN=\angle AKI$.

(1) 求证：$\triangle SMN$ 的外心 J 在一条定直线上.

(2) 在 BE,AF 上分别取点 P,Q，使得 CP 平行于 SE，DQ 平行于 SF. 直线 SE,SF 和圆 (SAB) 分别交于点 U,V，设 AU 和 BV 交于点 G. 求证：$\triangle GPQ$ 中顶点 G 对应的中线过一定点.

6.设整数 $n\geq 3$，S 为一个 n 元集合. 求最大的整数 k_n，满足：任取 k_n 个 S 的三元子集，都存在一种对 S 的元素二染色的方法，使得所选的三元子集均为单色的.

2023 年越南国家队选拔考试——中文翻译

第一天

1.一个学校里有 A和 B两个班，分别有 m和 n名学生. 两个班的学生围成一圈，然后每个学生会得到一些糖果，糖果的数量等于该学生左边连续的同班同学的个数（若左边不为同班同学，则获得 0颗糖果）. 分发完糖果后，老师将所有学生进行分组，获得糖果数相同的学生被分到同一组，不同组的学生获得的糖果数不同.

1. 一个小组最多可以有多少个学生?
2. 除未获得糖果多小组外，一个小组最多可以有多少个学生?

2.给定三个函数 $$P(x) = (x^2-1)^{2023}, Q(x) = (2x+1)^{14}, R(x) = \left(2x+1+\frac 2x \right)^{34}.$$ 起初，选取其中两个函数构成一个集合，然后对此集合进行一系列操作，每次可以进行的操作如下：

- 选取两个函数 $p,q\in S$，将 $p+q,p-q,pq$之一加入 S中；
- 选取一个函数 $p\in S$，将 p^{k}加入 S中，其中 k为任意正整数；
- 选取一个函数 $p\in S$和一个实数 t，将 $p+t,p-t,pt$之一加入 S中.

求证：不论起初 S中的两个函数如何选择，都无法在有限次操作后，将第三个函数也加入 S中. 3.设 $\triangle ABC$为不等边的锐角三角形，外接圆为 $\odot O$. BE,CF为 $\triangle ABC$的两条高，垂心为 H. M为 AH中点，点 K在 EF上，且满足 $HK\perp EF$. 一条不过点 A且平行于 BC的直线分别交 $\odot O$上的劣弧 AB,AC于点 P,Q. 求证：(CQE)在点 E处的切线，(BPF)在点 F处的切线，以及 MK，这三线共点.

2023 年越南国家队选拔考试——中文翻译

第二天

4.给定两个互质的正整数 a和 b，其中 b为奇数，$a>2$. 数列 $\{x_{n}\}$定义如下：$x_{0}=0$，$x_{1}=a$，对任意 $n\ge 1$，$x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_{n}$. 求证：

1. 若 a为偶数，则不存在正整数 m,n,p，使得 $\displaystyle\frac{x_{m}}{x_{n}x_{p}}$为正整数.
2. 若 a为奇数，则不存在正整数 m,n,p，使得 mnp为偶数，且 $\displaystyle\frac{x_{m}}{x_{n}x_{p}}$为完全平方数.

5.在凸四边形 $ABCD$中，$\angle B<\angle A<90^{\circ}$. 设 I为 AB的中点，S为 AD和 BC交点. R为 $\triangle SAB$内一个动点，满足 $\angle ASR=\angle BSR$. 在直线 AR,BR上分别取点 E,F，使得 BE,AF均和 RS平行. 设直线 EF和 $\triangle SAB$的外接圆交于点 H,K. 在线段 AB上取点 M,N，使得 $\angle AHM=\angle BHI$，$\angle BKN=\angle AKI$.

1. 求证：$\triangle SMN$的外心 J在一条定直线上.
2. 在 BE,AF上分别取点 P,Q，使得 CP平行于 SE，DQ平行于 SF. 直线 SE,SF和圆 (SAB)分别交于点 U,V，设 AU和 BV交于点 G. 求证：$\triangle GPQ$中顶点 G对应的中线过一定点.

6.设整数 $n\ge 3$，S为一个 n元集合. 求最大的整数 k_{n}，满足：任取 k_{n}个 S的三元子集，都存在一种对 S的元素二染色的方法，使得所选的三元子集均为单色的.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{hyperref}
```

```
\begin{document}
\section*{2023 年越南国家队选拔考试——中文翻译}
\section*{第一天}
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3051852p27497493}{\bf 1.}一个学校里有$A$和$B$两个班，
↪ 分别有$m$和$n$名学生．两个班的学生围成一圈，然后每个学生会得到一些糖果，
↪ 糖果的数量等于该学生左边连续的同班同学的个数（若左边不为同班同学，则获得$0$颗糖果）．分发完糖果后，
↪ 老师将所有学生进行分组，获得糖果数相同的学生被分到同一组，不同组的学生获得的糖果数不同．
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]
\item 一个小组最多可以有多少个学生？
\item 除未获得糖果多小组外，一个小组最多可以有多少个学生？
\end{enumerate}
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3051851p27497480}{\bf 2.}给定三个函数$$P(x) = (x^2-1)^{2023}, Q(x) =
↪ (2x+1)^{14}, R(x) = \left(2x+1+\frac 2x \right)^{34}.$$
起初，选取其中两个函数构成一个集合，然后对此集合进行一系列操作，每次可以进行的操作如下：
\begin{itemize}
\item 选取两个函数 $p,q\in S$，将 $p+q,p-q,pq$ 之一加入 $S$ 中；
\item 选取一个函数 $p\in S$，将 $p^{k}$ 加入 $S$ 中，其中 $k$ 为任意正整数；
\item 选取一个函数 $p\in S$ 和一个实数 $t$，将 $p+t,p-t,pt$ 之一加入 $S$ 中．
\end{itemize}
求证：不论起初 $S$ 中的两个函数如何选择，都无法在有限次操作后，将第三个函数也加入 $S$ 中．
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3051855p27497504}{\bf 3.}设$\triangle ABC$为不等边的锐角三角形，
↪ 外接圆为$\odot O$．$BE,CF$为$\triangle ABC$的两条高，垂心为$H$．$M$为$AH$中点，点$K$在$EF$上，
↪ 且满足$HK\perp EF$．一条不过点$A$且平行于$BC$的直线分别交$\odot O$上的劣弧$AB,AC$于点$P,Q$．求证：
↪ $(CQE)$在点$E$处的切线，$(BPF)$在点$F$处的切线，以及$MK$，这三线共点．
\newpage
\section*{2023 年越南国家队选拔考试——中文翻译}
\section*{第二天}
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3052608p27506245}{\bf 4.}给定两个互质的正整数$a$和$b$，
↪ 其中$b$为奇数，$a>2$．数列$\{x_{n}\}$定义如下：$x_{0}=0$，$x_{1}=a$，对任意$n\ge 1$，$x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_{n}$．
↪ 求证：
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]
\item 若 $a$ 为偶数，则不存在正整数 $m,n,p$，使得 $\displaystyle\frac{x_{m}}{x_{n}x_{p}}$ 为正整数．
\item 若 $a$ 为奇数，则不存在正整数 $m,n,p$，使得 $mnp$ 为偶数，且 $\displaystyle\frac{x_{m}}{x_{n}x_{p}}$ 为完全平方数．
\end{enumerate}
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3052614p27506327}{\bf 5.}在凸四边形$ABCD$中，$\angle B<\angle
↪ A<90^{\circ}$．设$I$为$AB$的中点，$S$为$AD$和$BC$交点．$R$为$\triangle SAB$内一个动点，满足$\angle ASR=\angle
↪ BSR$．在直线$AR,BR$上分别取点$E,F$，使得$BE,AF$均和$RS$平行．设直线$EF$和$\triangle
↪ SAB$的外接圆交于点$H,K$．在线段$AB$上取点$M,N$，使得$\angle AHM=\angle BHI$，$\angle BKN=\angle AKI$．
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]
\item 求证：$\triangle SMN$ 的外心 $J$ 在一条定直线上．
\item 在$BE,AF$上分别取点$P,Q$，使得$CP$平行于$SE$，$DQ$平行于$SF$．直线$SE,SF$和圆$(SAB)$分别交于点$U,V$，
↪ 设$AU$和$BV$交于点$G$．求证：$\triangle GPQ$中顶点$G$对应的中线过一定点．
\end{enumerate}
\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3052613p27506296}{\bf 6.}设整数$n\ge 3$，$S$为一个$n$元集合．
↪ 求最大的整数$k_{n}$，满足：任取$k_{n}$个$S$的三元子集，都存在一种对$S$的元素二染色的方法，
↪ 使得所选的三元子集均为单色的．
\end{document}
```