2024 年蒙古国数学奥林匹克

2024-04-16 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_716f5a342122e500

2024 年蒙古国数学奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 求所有三元正整数组 (a,b,c)，使得 $a\le b$，且 $a!+b!=c^4+2024$.

2. 如果由五边形的三个顶点组成的三角形的面积大于五边形面积的一半，我们就称它为大三角形. 求凸五边形中最多有多少个大三角形.

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得对任意正实数 x,y，都有

$$f(x)f(y+f(x))=f(1+xy).$$

第二天

4. 设多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的所有系数均为非负实数. 且 $P(0)=Q(0)=0$，$Q(1)\le 1\le P'(0)$. 求证:

(1) 对任意 $0\le x\le 1$，都有 $0\le Q(x)\le x\le P(x)$.

(2) 对任意 $0\le x\le 1$，都有 $P(Q(x))\le Q(P(x))$.

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，E,F 分别为 B,C 在 CA,AB 边上的垂足，AD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，M 为 BC 的中点. 设 $\triangle BMF$ 和 $\triangle CME$ 的内切圆的内位似中心为点 K，求证：K,M,D 三点共线.

6. 称由 n 个正整数组成的集合 X 是“好的”，如果其满足以下条件：对 X 的任意两个不同子集 A 和 B，$s(A)-s(B)$ 不能被 2^n 整除.（对集合 A，设 $s(A)$ 为 A 中所有元素之和）

对给定的正整数 n，求其中每个元素都小于 2^n 的“好的”集合的个数.

2024 年蒙古国数学奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 求所有三元正整数组 (a,b,c)，使得 $a\le b$，且 $a!+b!=c^{4}+2024$.

2. 如果由五边形的三个顶点组成的三角形的面积大于五边形面积的一半，我们就称它为大三角形. 求凸五边形中最多有多少个大三角形.

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$，使得对任意正实数 x,y，都有 $$

f(x)f(y+f(x))=f(1+xy).$$

第二天

4. 设多项式 $P(x)$和 $Q(x)$的所有系数均为非负实数. 且 $P(0)=Q(0)=0$, $Q(1)\le 1\le P'(0)$. 求证:

1. 对任意 $0\le x\le 1$，都有 $0\le Q(x)\le x\le P(x)$.
2. 对任意 $0\le x\le 1$，都有 $P(Q(x))\le Q(P(x))$.

5. 在锐角 $\triangle ABC$中，E,F分别为 B,C在 CA,AB边上的垂足，AD为 $\triangle ABC$外接圆的直径，M为 BC的中点. 设 $\triangle BMF$和 $\triangle CME$的内切圆的内位似中心为点 K，求证：K,M,D三点共线.

6. 称由 n个正整数组成的集合 X是 “好的”，如果其满足以下条件：对 X的任意两个不同子集 A和 B，$s(A)-s(B)$不能被 2^{n}整除.（对集合 A，设 $s(A)$为 A中所有元素之和）对给定的正整数 n，求其中每个元素都小于 2^{n}的 “好的” 集合的个数.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年蒙古国数学奥林匹克}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\section*{第一天}\ex
↪ 求所有三元正整数组$(a,b,c)$，使得$a\le b$，且$a!+b!=c^{4}+2024$. \vfill\ex
↪ 如果由五边形的三个顶点组成的三角形的面积大于五边形面积的一半，我们就称它为大三角形.
↪ 求凸五边形中最多有多少个大三角形. \vfill\ex 求所有函数$f:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$，使得对任意正实数$x,y$，
↪ 都有$$f(x)f(y+f(x))=f(1+xy).$$\vfill\section*{第二天}\ex 设多项式$P(x)$和$Q(x)$的所有系数均为非负实数. 且$P(0)=Q(0)=0$，
↪ $Q(1)\le 1\le P'(0)$. 求证：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 对任意$0\le x\le 1$，都有$0\le Q(x)\le x\le P(x)$. \item
↪ 对任意$0\le x\le 1$，都有$P(Q(x))\le Q(P(x))$. \end{enumerate}\vfill\ex 在锐角$\triangle ABC$中，
↪ $E,F$分别为$B,C$在$CA,AB$边上的垂足，$AD$为$\triangle ABC$外接圆的直径，$M$为$BC$的中点. 设$\triangle
↪ BMF$和$\triangle CME$的内切圆的内位似中心为点$K$，求证：$K,M,D$三点共线. \vfill\ex
↪ 称由$n$个正整数组成的集合$X$是“好的”，如果其满足以下条件：对$X$的任意两个不同子集$A$和$B$，
↪ $s(A)-s(B)$不能被$2^{n}$整除. （对集合$A$，设$s(A)$为$A$中所有元素之和）
对给定的正整数 $n$，求其中每个元素都小于 $2^{n}$ 的 “好的” 集合的个数. \vfill
```