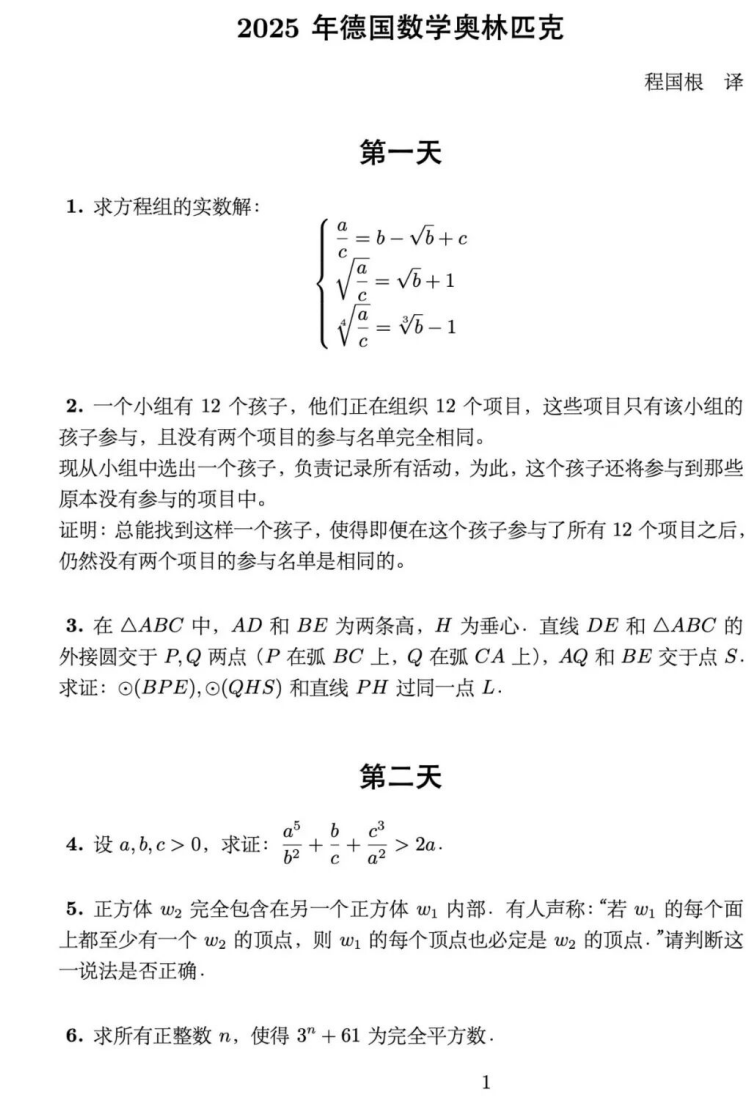
2025 年德国数学奥林匹克

2025-07-04　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7171c56cfce76695

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。



2025 年德国数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 求方程组的实数解：

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c} = b - \sqrt{b} + c \\ \sqrt{\dfrac{a}{c}} = \sqrt{b} + 1 \\ \sqrt[4]{\dfrac{a}{c}} = \sqrt[3]{b} - 1 \end{cases}$$

2. 一个小组有 12 个孩子，他们正在组织 12 个项目，这些项目只有该小组的孩子参与，且没有两个项目的参与名单完全相同。
现从小组中选出一个孩子，负责记录所有活动，为此，这个孩子还将参与到那些原本没有参与的项目中。
证明：总能找到这样一个孩子，使得即便在这个孩子参与了所有 12 个项目之后，仍然没有两个项目的参与名单是相同的。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 和 BE 为两条高，H 为垂心．直线 DE 和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 P, Q 两点（P 在弧 BC 上，Q 在弧 CA 上），AQ 和 BE 交于点 S．求证：$\odot(BPE), \odot(QHS)$ 和直线 PH 过同一点 L．

第二天

4. 设 $a, b, c > 0$，求证：$\dfrac{a^5}{b^2} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c^3}{a^2} > 2a$．

5. 正方体 w_2 完全包含在另一个正方体 w_1 内部．有人声称："若 w_1 的每个面上都至少有一个 w_2 的顶点，则 w_1 的每个顶点也必定是 w_2 的顶点．"请判断这一说法是否正确．

6. 求所有正整数 n，使得 $3^n + 61$ 为完全平方数．

1

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 第一天第 1 题　求方程组的实数解：$\begin{cases}\dfrac{a}{c}=b-\sqrt{b}+c,\\[2mm]\sqrt{\dfrac{a}{c}}=\sqrt{b}+1,\\[2mm]\sqrt[4]{\dfrac{a}{c}}=\sqrt[3]{b}-1.\end{cases}$

2. 第一天第 2 题　一个小组有 12 个孩子，他们正在组织 12 个项目，这些项目只有该小组的孩子参与，且没有两个项目的参与名单完全相同。现从小组中选出一个孩子，负责记录所有活动，为此，这个孩子还将参与到那些原本没有参与的项目中。证明：总能找到这样一个孩子，使得即便在这个孩子参与了所有 12 个项目之后，仍然没有两个项目的参与名单是相同的。
3. 第一天第 3 题　在 $\triangle ABC$ 中，AD 和 BE 为两条高，H 为垂心。直线 DE 和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 P,Q 两点（P 在弧 BC 上，Q 在弧 CA 上），AQ 和 BE 交于点 S。求证：$\odot(BPE)$、$\odot(QHS)$ 和直线 PH 过同一点 L。
4. 第二天第 4 题　设 $a,b,c>0$，求证：$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b}{c}+\frac{c^3}{a^2}>2a$。
5. 第二天第 5 题　正方体 w_2 完全包含在另一个正方体 w_1 内部。有人声称：“若 w_1 的每个面上都至少有一个 w_2 的顶点，则 w_1 的每个顶点也必定是 w_2 的顶点。”请判断这一说法是否正确。
6. 第二天第 6 题　求所有正整数 n，使得 3^n+61 为完全平方数。