数学竞赛每日一练第 17 期解答

2021-06-21　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_720c9d048ff1c223

题目来源：2021 年马其顿初中数学奥林匹克

另解见：李耀文——2021 马其顿初中数学林匹克第 5 题解答

设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，点 X 和 Y 分别在 AB 和 AC 上，满足 $BX=CY$. I_B 和 I_C 分别为 $\triangle ABY$ 和 $\triangle ACX$ 的内心，T 为 $\triangle ABY$ 和 $\triangle ACX$ 的外接圆的另一交点. 求证：$\dfrac{TI_B}{TI_C}=\dfrac{BY}{CX}$.

解答（PDF 中已展开）

证明：记 $\triangle ABY$ 和 $\triangle ACX$ 的外接圆半径分别为 R_1 和 R_2. 则

$$\frac{BY}{CX}=\frac{2R_1\sin\angle BAY}{2R_2\sin\angle CAX}=\frac{R_1}{R_2}$$

由 A、B、T、Y 四点共圆，A、C、T、X 四点共圆得：

$$\angle BYT=\angle XCT,\angle CXT=\angle YBT$$

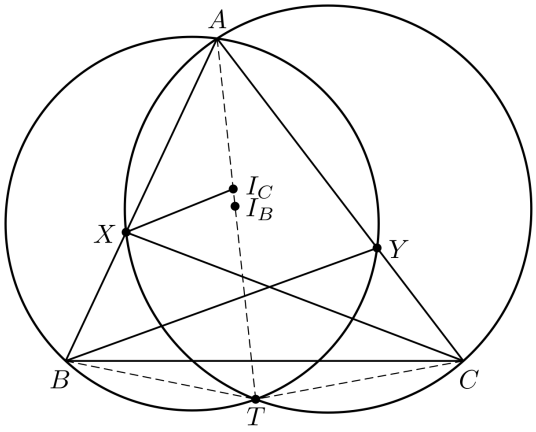
结合 $BX=CY$，有 $\triangle BTX\cong\triangle YTC$.

于是 $TC=TX$，这说明 T 在 $\angle A$ 的角平分线上，即 A、I_C、I_B、T 四点共线.

由“鸡爪定理”，$TI_B=TB$，$TI_C=TC$，于是

$$\frac{TI_B}{TI_C}=\frac{TB}{TC}=\frac{2R_1\sin\angle\dfrac{A}{2}}{2R_2\sin\angle\dfrac{A}{2}}=\frac{R_1}{R_2}$$

于是 $\dfrac{TI_B}{TI_C}=\dfrac{BY}{CX}$，证毕.




```
\usepackage{tikz}
\usepackage{tkz-euclide}
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{1/2.5/A,0/0/B,4/0/C} % 定义 A、B、C 三点
\tkzDefPointWith[linear normed,K=sqrt(2)](B,A)\tkzGetPoint{X} % 在线段 AB 上取点 X，使 BX=\sqrt{2}
\tkzDefPointWith[linear normed,K=sqrt(2)](C,A)\tkzGetPoint{Y} % 在线段 AC 上取点 Y，使 CY=\sqrt{2}
\tkzInCenter(A,B,Y)\tkzGetPoint{I_B} % 取三角形 ABY 的内心 I_B
\tkzInCenter(A,C,X)\tkzGetPoint{I_C} % 取三角形 ACX 的内心 I_C
\tkzDefTriangleCenter[circum](A,B,Y) \tkzGetPoint{O_1}\tkzGetLength{r_1} %定义三角形ABY的外接圆，圆心为O_1，半径为r_1
\tkzDefTriangleCenter[circum](A,C,X) \tkzGetPoint{O_2}\tkzGetLength{r_2} %定义三角形ACX的外接圆，圆心为O_2，半径为r_2
\tkzInterCC(O_1,A)(O_2,A)\tkzGetPoints{A}{T} % 两圆交点为 A 和 T
\tkzDrawPoints(I_B,I_C) % 作点
\tkzDrawCircle(O_1,A) % 作圆
\tkzDrawCircle(O_2,A) % 作圆
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A B,Y C,X) % 连接线段
\tkzDrawSegments[dashed](T,A T,B T,C) % 连接线段（虚线）
\tkzLabelPoints[below](B,C,T)
\tkzLabelPoints[above](A)
\tkzLabelPoints[right](I_B,I_C,Y)
\tkzLabelPoints[left](X)
\end{tikzpicture}
```