2025 年第六届北马其顿”亚历山大-布拉泽夫斯基-凯恩”纪念赛

2025-02-06 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_728edea2e1c373cf

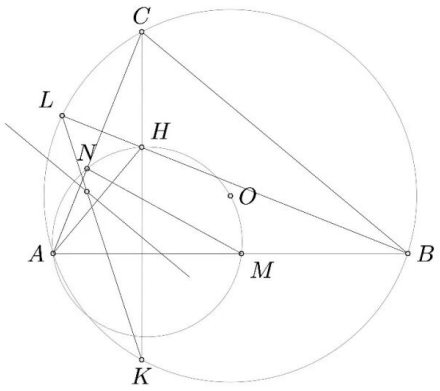
本文为图片版：正文为 3 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。

2025 年北马其顿”亚历山大-布拉泽夫斯基-凯恩”纪念赛

高级组（第一天）

1. 某个国家的道路基础设施由偶数条直连道路构成，每条道路都是双向的．此外，对于任意两个城市 X 和 Y，二者之间至多有一条直连道路，且存在一个城市序列 $X=X_0,X_1,\cdots,X_{n-1},X_n=Y$，使得对于每个 $i=0,\cdots,n-1$，城市 X_i 和 X_{i+1} 之间存在一条直连道路．证明：该国所有直连道路可以被定向（即每条道路改为单向行驶），使得每个城市 X 作为起点的直连道路数量为偶数．

2. 设 $\triangle ABC$ 是一个不等边锐角三角形，其中 $\angle A$ 为第二大角，H 是垂心，O 是外心，Ω 是外接圆．设 $\triangle AHO$ 的外接圆分别与边 AB 和 AC 再次相交于 M 和 N，而高 CH 和 BH 分别与外接圆 Ω 再次相交于 K 和 L．证明：KL 与 AH 的垂直平分线的交点是 $\triangle AMN$ 的垂心．



1

3. 如果对于每一个 $k \geq 1$，不等式 $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$ 都成立，那么实数列 $\{a_k\}_{k\geq 0}$ 就被称为对数凹数列．设 n、l 为自然数．证明：通项为

$$a_k = \sum_{i=k}^{k+l} \binom{n}{i}$$

的数列 $\{a_k\}_{k\geq 0}$ 是对数凹数列．

高级组（第二天）

4. 证明：对任意实数 $a, b, c > 1$，都有不等式

$$a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b) \geq a^2+b^2+c^2+3abc.$$

并说明等号何时成立．

5. 设正整数 $s < t$ ．按如下方式定义一个数列：$a_1 = s$，$a_2 = t$；a_3 是大于 a_2 且能被 a_1 整除的最小整数；一般地，a_{n+1} 是大于 a_n 且能被 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}$ 整除的最小整数．

(1) 这样的数列中最多能出现多少个奇数?（请说明理由）

(2) 证明：无论 s 和 t 如何选取，a_{2025} 都能被 2^{808} 整除．

6. 平面上有 $n \geq 7$ 个点，其中任意三点都不共线．至少有 7 对点由线段相连．对于上述每一条线段 s，设 $t(s)$ 是以线段 s 为边的三角形的个数．证明：存在不同的线段 s_1、s_2、s_3 和 s_4，使得

$$t(s_1) = t(s_2) = t(s_3) = t(s_4)$$

成立．

初级组（第一天）

1. 求所有的三元素数组 (p, q, r)，使得

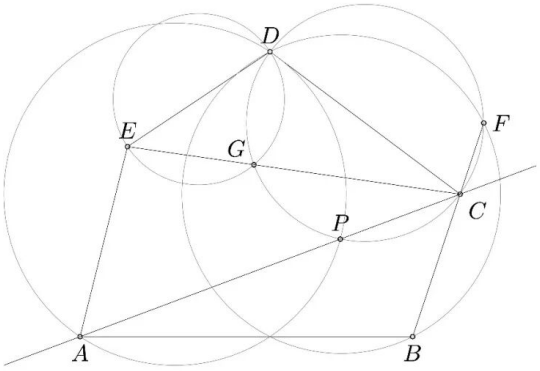
$$p \cdot 2^q + r^2 = 2025.$$

2. 同高级组第 1 题

3. 同高级组第 2 题

初级组（第二天）

4. 设 $ABCDE$ 为一个五边形，满足 $\angle DCB < 90^\circ < \angle EDC$. 以 BD 为直径的圆与直线 BC 再次相交于点 F，以 DE 为直径的圆与直线 CE 再次相交于点 G. 证明：$\triangle DFG$ 的外接圆与以 AD 为直径的圆的第二个交点（不同于点 D）位于直线 AC 上.



5. 同高级组第 4 题

6. 同高级组第 5 题

3

两道几何题的图由 AI 辅助生成（tkz-euclide 宏包）

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 高级组第一天第 1 题　某个国家的道路基础设施由偶数条直连道路构成，每条道路都是双向的。此外，对于任意两个城市 X 和 Y，二者之间至多有一条直连道路，且存在一个城市序列 $X=X_0,X_1,\dots,X_{n-1},X_n=Y$，使得对于每个 $i=0,\dots,n-1$，城市 X_i 和 X_{i+1} 之间存在一条直连道路。证明：该国所有直连道路可以被定向（即每条道路改为单向行驶），使得每个城市 X 作为起点的直连道路数量为偶数。
2. 高级组第一天第 2 题　设 $\triangle ABC$ 是一个不等边锐角三角形，其中 $\angle A$ 为第二大角，H 是垂心，O 是外心，Ω 是外接圆。设 $\triangle AHO$ 的外接圆分别与边 AB 和 AC 再次相交于 M 和 N，而高 CH 和 BH 分别与外接圆 Ω 再次相交于 K 和 L。证明：KL 与 AH 的垂直平分线的交点是 $

\triangle AMN$ 的垂心。

3. 高级组第一天第 3 题　如果对于每一个 $k\ge 1$，不等式 $a_{k-1}a_{k+1}\le a_k^2$ 都成立，那么实数列 $\{a_k\}_{k\ge 0}$ 就被称为对数凹数列。设 n,l 为自然数。证明：通项为 $a_k=\sum_{i=k}^{k+l}\binom{n}{i}$ 的数列 $\{a_k\}_{k\ge 0}$ 是对数凹数列。
4. 高级组第二天第 4 题　证明：对任意实数 $a,b,c>1$，都有不等式 $a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b)\ge a^2+b^2+c^2+3abc$，并说明等号何时成立。
5. 高级组第二天第 5 题　设正整数 $s<t$。按如下方式定义一个数列：$a_1=s$，$a_2=t$；a_3 是大于 a_2 且能被 a_1 整除的最小整数；一般地，a_{n+1} 是大于 a_n 且能被 $a_1,a_2,\dots,a_{n-2},a_{n-1}$ 整除的最小整数。（1）这样的数列中最多能出现多少个奇数?（请说明理由）（2）证明：无论 s 和 t 如何选取，a_{2025} 都能被 2^{808} 整除。
6. 高级组第二天第 6 题　平面上有 $n\ge 7$ 个点，其中任意三点都不共线。至少有 7 对点由线段相连。对于上述每一条线段 s，设 $t(s)$ 是以线段 s 为边的三角形的个数。证明：存在不同的线段 s_1,s_2,s_3,s_4，使得 $t(s_1)=t(s_2)=t(s_3)=t(s_4)$ 成立。
7. 初级组第一天第 1 题　求所有的三元素数组 (p,q,r)，使得 $p\cdot 2^q+r^2=2025$。
8. 初级组第一天第 2 题　同高级组第 1 题。
9. 初级组第一天第 3 题　同高级组第 2 题。
10. 初级组第二天第 4 题　设 $ABCDE$ 为一个五边形，满足 $\angle DCB<90^\circ<\angle EDC$。以 BD 为直径的圆与直线 BC 再次相交于点 F，以 DE 为直径的圆与直线 CE 再次相交于点 G。证明：$\triangle DFG$ 的外接圆与以 AD 为直径的圆的第二个交点（不同于点 D）位于直线 AC 上。
11. 初级组第二天第 5 题　同高级组第 4 题。
12. 初级组第二天第 6 题　同高级组第 5 题。