2022 年普林斯顿数学竞赛（PUMaC）代数组

2023-10-12　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_72a20c53941b9ff0

2022 年普林斯顿数学竞赛（代数 A 组）

程国根译

1. 给定多项式 f 和 g，满足对任意实数 x，都有 $f(x) \geq g(x)$．f 和 g 的分隔线是指直线 $h(x) = mx + k$，满足对任意实数 x，都有 $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$．考虑 $f(x) = x^2 - 2x + 5$ 和 $g(x) = 1 - x^2$ 的所有分隔线组成的集合，集合中所有直线的斜率范围为闭区间 $[a, b]$．求 $a^4 + b^4$ 的值．

2. 设 $P(x, y)$ 为关于 x, y 的实系数非零多项式，且对任意实数 a，都有 $P(\lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor) = 0$．若 P 的次数取最小可能值，且其中单项式 y 的系数为 4．求 P 中 x^2y^2 项的系数．

3. 求方程组的所有实数解 (x, y)：$\begin{cases} \sin(x^2 - y) = 0 \\ |x| + |y| = 2\pi \end{cases}$．

4. 已知在复平面中，$C = \{z \mid (z+1)^2 = az, a \in [-10, 3]\}$ 的图像是两条恰交于一点的曲线之并．若两条曲线的长度之和为 ℓ，求 $\lfloor \ell \rfloor$．

5. 非负实数 x, y, z 满足方程

$$\sqrt{xyz} - \sqrt{(1-x)(1-y)z} - \sqrt{(1-x)y(1-z)} - \sqrt{x(1-y)(1-z)} = -\frac{1}{2}.$$

记 $\sqrt{xy}$ 的最大可能值为 $\dfrac{a + \sqrt{b}}{c}$，其中 a, b, c 为正整数，且 b 无平方因子．求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的值．

6. 正实数 x, y, z 满足 $4x^2 - 2xy + y^2 = 64$，$y^2 - 3yz + 3z^2 = 36$，$4x^2 + 3z^2 = 49$．若 $2xy + yz - 4zx$ 的最大值能表示为 $\sqrt{n}$ 的形式，其中 n 为正整数，求 n 的值．

7. 对正整数 n，设 $a_n = \lfloor \sqrt[3]{n} + \dfrac{1}{2} \rfloor$．给定正整数 N，记 $\mathcal{F}_N = \{n \mid a_n \leq N\}$，$S_N = \displaystyle\sum_{n \in \mathcal{F}_N} \frac{1}{a_n^2}$．若当 N 趋于无穷时，$S_N - 3N$ 的极限为 $\dfrac{a\pi^2}{b}$ 的形式，其中 a, b 为互质的正整数，求 $a + b$ 的值．（已知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$）

8. 已知 f 按照如下规则将一个数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 变为另一个数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$：对任意 $n \geq 0$，$b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k}$．斐波那契数列数列 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 定义如下：$F_0 = F_1 = 1$，对任意 $n \geq 0$，$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$．若将 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 经过 2022 次 f 作用后变为数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$．求 c_5 模 1000 的余数．

1

2022 年普林斯顿数学竞赛（代数 B 组）

注：代数 B 组的第 3 题至第 8 题分别为 A 组的第 1 题至第 6 题.

程国根译

1. 当 (a_1, a_2, a_3, a_4) 取遍 $(1, 2, 3, 4)$ 的所有排列时，记 $a_1^{-a_2^{a_3^{a_4}}}$ 的所有取值之和为 q. 求 $\lfloor q \rfloor$ 的值.

2. 称一对实系数二次多项式 (f, g) 是**愚蠢的**，如果对任意实数 x，都有 $f(g(x)) = f(x) \cdot g(x)$. 对于一对愚蠢的 (f, g)，在小于 2023 的所有正整数中，有多少个正整数可能为 $g(x)$ 的一个根?

2022 年普林斯顿数学竞赛（代数 A 组）

程国根译

1. 给定多项式 f和 g，满足对任意实数 x，都有 $f(x)\ge g(x)$. f和 g的分隔线是指直线 $h(x)=mx+k$，满足对任意实数 x，都有 $f(x)\ge h(x)\ge g(x)$. 考虑 $f(x)=x^{2}-2x+5$和 $g(x)=1-x^{2}$的所有分隔线组成的集合，集合中所有直线的斜率范围为闭区间 $[a,b]$. 求 $a^{4}+b^{4}$的值.

2. 设 $P(x,y)$为关于 x,y的实系数非零多项式，且对任意实数 a，都有 $P(\lfloor 2a\rfloor,\lfloor 3a\rfloor)=0$. 若 P的次数取最小可能值，且其中单项式 y的系数为 4. 求 P中 $x^{2}y^{2}$项的系数.

3. 求方程组的所有实数解 (x,y): $\begin{cases}\sin(x^{2}-y)=0\\ |x|+|y|=2\pi\end{cases}$.

4. 已知在复平面中，$C=\{z\mid (z+1)^{2}=az,a\in[-10,3]\}$的图像是两条恰交于一点的曲线之并. 若两条曲线的长度之和为 ℓ，求 $\lfloor\ell\rfloor$.

5. 非负实数 x,y,z满足方程 $$\sqrt{xyz}-\sqrt{(1-x)(1-y)z}-\sqrt{(1-x)y(1-z)}-\sqrt{x(1-y)(1-z)}=-\frac{1}{2}.$$记 $\sqrt{xy}$的最大可能值为 $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$，其中 a,b,c为正整数，且 b无平方因子．求 $a^{2}+b^{2}+c^{2}$的值.

6. 正实数 x,y,z满足 $4x^{2}-2xy+y^{2}=64$，$y^{2}-3yz+3z^{2}=36$，$4x^{2}+3z^{2}=49$．若 $2xy+yz-4zx$的最大值能表示为 $\sqrt{n}$的形式，其中 n为正整数，求 n的值.

7. 对正整数 n，设 $a_{n}=\lfloor \sqrt[3]n+\frac{1}{2}\rfloor$．给定正整数 N，记 $\mathcal{F}_{N}=\{n\mid a_{n}\le N\}$，$S_{N}=\sum\limits_{n\in\mathcal{F}_{N}}\frac{1}{a_{n}^{2}}$．若当 N趋于无穷时，$S_{N}-3N$的极限为 $\frac{a\pi^{2}}{b}$的形式，其中 a,b为互质的正整数，求 $a+b$的值．（已知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$）

8. 已知 f按照如下规则将一个数列 $\{a_{n}\}_{n=0}^{\infty}$变为另一个数列 $\{b_{n}\}_{n=0}^{\infty}$：对任意 $n\ge 0$，$b_{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{k}\binom{n}{k}$．斐波那契数列数列 $\{F_{n}\}_{n=0}^{\infty}$定义如下：$F_{0}=F_{1}=1$，对任意 $n\ge 0$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_{n}$．若将 $\{F_{n}\}_{n=0}^{\infty}$经过 2022次 f作用后变为数列 $\{c_{n}\}_{n=0}^{\infty}$．求 c_{5}模 1000的余数.

2022 年普林斯顿数学竞赛（代数 B 组）

注：代数 B 组的第 3 题至第 8 题分别为 A 组的第 1 题至第 6 题.

程国根译

1. 当 $(a_{1},a_{2},a_{3},a_{4})$取遍 $(1,2,3,4)$的所有排列时，记 $a_{1}^{-a_{2}^{a_{3}^{a_{4}}}}$的所有取值之和为 q．求 $\lfloor q\rfloor$的值.

2. 称一对实系数二次多项式 (f,g)是**愚蠢的**，如果对任意实数 x，都有 $f(g(x))=f(x)\cdot g(x)$．对于一对愚蠢的 (f,g)，在小于 2023的所有正整数中，有多少个正整数可能为 $g(x)$的一个根?

解答（PDF 中已展开）

\section*{2022 年普林斯顿数学竞赛（代数 A 组）}\flushright 程国根译

\ex 给定多项式f和g，满足对任意实数x，都有$f(x)\ge g(x)$．f和g的分隔线是指直线$h(x)=mx+k$，
↪ 满足对任意实数x，都有$f(x)\ge h(x)\ge g(x)$．考虑$f(x)=x^{2}-2x+5$和$g(x)=1-x^{2}$的所有分隔线组成的集合，
↪ 集合中所有直线的斜率范围为闭区间$[a,b]$．求$a^{4}+b^{4}$的值．\vfill\ex 设$P(x,y)$为关于x,y的实系数非零多项式，
↪ 且对任意实数a，都有$P(\lfloor 2a\rfloor,\lfloor 3a\rfloor)=0$．若$P$的次数取最小可能值，且其中单项式$y$的系数为$4$．
↪ 求P中$x^{2}y^{2}$项的系数．\vfill\ex 求方程组的所有实数解(x,y)：
↪ $\begin{cases}\sin(x^{2}-y)=0\\|x|+|y|=2\pi\end{cases}$．\vfill\ex 已知在复平面中，$C=\{z\mid
↪ (z+1)^{2}=az,a\in[-10,3]\}$的图像是两条恰交于一点的曲线之并．若两条曲线的长度之和为ℓ，求$\lfloor\ell\rfloor$．\vfill\ex
↪ 非负实数x,y,z满足方程$$\sqrt{xyz}-\sqrt{(1-x)(1-y)z}-\sqrt{(1-x)y(1-z)}-\sqrt{x(1-y)(1-z)}=-\frac{1}{2}.$$记$\sqrt{xy}$的最大」
↪ 可能值为$\frac{a+\sqrt{b}}{c}$，其中a,b,c为正整数，且b无平方因子．求$a^{2}+b^{2}+c^{2}$的值．\vfill\ex
↪ 正实数x,y,z满足$4x^{2}-2xy+y^{2}=64$，$y^{2}-3yz+3z^{2}=36$，$4x^{2}+3z^{2}=49$．
↪ 若$2xy+yz-4zx$的最大值能表示为$\sqrt{n}$的形式，其中n为正整数，求n的值．\vfill\ex 对正整数n，设$a_{n}=\lfloor
↪ \sqrt[3]n+\frac{1}{2}\rfloor$．给定正整数$N$，记$\mathcal{F}_{N}=\{n\mid a_{n}\le N\}$，
↪ $S_{N}=\sum\limits_{n\in\mathcal{F}_{N}}\frac{1}{a_{n}^{2}}$．若当$N$趋于无穷时，
↪ $S_{N}-3N$的极限为$\frac{a\pi^{2}}{b}$的形式，其中a,b为互质的正整数，求$a+b$的值．
↪ （已知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$）\vfill\ex
↪ 已知f按照如下规则将一个数列$\{a_{n}\}_{n=0}^{\infty}$变为另一个数列$\{b_{n}\}_{n=0}^{\infty}$：对任意$n\ge 0$，
↪ $b_{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{k}\binom{n}{k}$．斐波那契数列数列$\{F_{n}\}_{n=0}^{\infty}$定义如下：$F_{0}=F_{1}=1$，
↪ 对任意$n\ge 0$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_{n}$．
↪ 若将$\{F_{n}\}_{n=0}^{\infty}$经过2022次f作用后变为数列$\{c_{n}\}_{n=0}^{\infty}$．求c_{5}模1000的余数．
↪ \vfill\newpage\section*{2022年普林斯顿数学竞赛（代数B组）}\subsection*{注：
↪ 代数B组的第3题至第8题分别为A组的第1题至第6题．}\flushright 程国根译\setcounter{ex}{0}\ex
↪ 当$(a_{1},a_{2},a_{3},a_{4})$取遍$(1,2,3,4)$的所有排列时，记$a_{1}^{-a_{2}^{a_{3}^{a_{4}}}}$的所有取值之和为$q$．
↪ 求$\lfloor q\rfloor$的值．\ex 称一对实系数二次多项式(f,g)是\textbf{愚蠢的}，如果对任意实数x，都有$f(g(x))=f(x)\cdot
↪ g(x)$．对于一对愚蠢的$(f,g)$，在小于$2023$的所有正整数中，有多少个正整数可能为$g(x)$的一个根？