2023 年香港 IMO 代表队第三次选拔考试试题

2022-12-04 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_72ab8e93eb2409e1

1. 非零实数 a,b,c 满足 $abc=2$. 求证：$2a-\dfrac{1}{b}$,$2b-\dfrac{1}{c}$,$2c-\dfrac{1}{a}$ 中至多两个大于 2.

2. 将 $\dfrac{39}{1428}$ 转换为二进制的小数，求该小数的循环周期.
   注：将分数化为小数时（在任意进制下），要么为有限小数，要么形式为
   $0.b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots$
   其中重复的序列 $a_1a_2\cdots a_k$ 称为循环节，最小的循环节长度 k 称为小数的循环周期.

3. 给定一个 2023×2023 的方格网，在其中一些单元格内有甲虫，每个单元格上最多有一只甲虫. 在第一分钟，每只甲虫将向其左或右相邻的方格移动一格. 在第二分钟，每只甲虫将再次移动，只是这一次，如果甲虫在前一分钟向右或左移动，它将在这一分钟向上或下移动一格，反之亦然，如此重复. 求正方形网格中的甲虫的最小数量，以确保无论甲虫最初在哪里，以及它们在第一分钟内如何移动，但在有限分钟后，至少有两只甲虫会在某个单元格相遇.

4. 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ，且满足 $AB=BC=CD$. M 和 N 分别为 AD 和 AB 的中点，直线 CM 和 Γ 再次交于点 E. 求证：Γ 在 E 处的切线、直线 AD、直线 CN 三线共点.

前两次测试：