用数学归纳法证明一道俄罗斯不等式

2024-04-11 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7325c6a7a7f04be0

假设 $0 \le x_i \le 1$，求证：$\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2) \ge 1$，其中 $x_{n+1}=x_1$.

分析 考虑到变量之间没有联系，待证式左边为求积形式，可以尝试用数学归纳法证明.

证明 对 n 归纳，$n=1$ 时为恒等式.

假设结论对 n 成立，即

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2)=\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2)\cdot(1-x_nx_1+x_1^2)\ge 1$$

对于 $n+1$ 的情况，要证明：

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2)\ge 1$$

$$\iff \prod_{i=1}^{n-1}(1-x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2)\cdot(1-x_nx_{n+1}+x_{n+1}^2)\cdot(1-x_{n+1}x_1+x_1^2)\ge 1$$

只需证明：

$$(1-x_nx_{n+1}+x_{n+1}^2)\cdot(1-x_{n+1}x_1+x_1^2)\ge 1-x_nx_1+x_1^2$$

重设 x_1,x_n,x_{n+1} 为 a,b,c，即证：对 $a,b,c\in[0,1]$，有

$$(1-bc+c^2)(1-ca+a^2)\ge 1-ab+a^2 \iff (1-ac)(a-c)(b-c)\ge 0$$

由 $a,c\in[0,1]$ 知 $1-ac\ge 0$，故只需证：$(a-c)(b-c)\ge 0$.

这不一定成立，但可以在开始时，不妨设 $c=x_{n+1}=\min\limits_{1\le i\le n+1}\{x_i\}$.

这样，$x_1\ge x_{n+1}$，$x_n\ge x_{n+1}$，$(a-c)(b-c)\ge 0$.

由数学归纳法即证.

假设$0\le x_{i}\le 1$，求证：$\prod_{i=1}^{n}(1-x_{i}x_{i+1}+x_{i+1}^{2})\ge 1$，其中$x_{n+1}=x_{1}$.
↪ \begin{analysis}考虑到变量之间没有联系，待证式左边为求积形式，可以尝试用数学归纳法证明.
↪ \end{analysis}\begin{proof}对n归纳，$n=1$时为恒等式.
假设结论对n成立，
↪ 即$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_{i}x_{i+1}+x_{i+1}^{2})=\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_{i}x_{i+1}+x_{i+1}^{2})\cdot(1-x_{n}x_{1}+x_{1}^{2})\ge
↪ 1$$
对于$n+1$的情况，要证明：$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n+1}(1-x_{i}x_{i+1}+x_{i+1}^{2})\ge
↪ 1\\\iff&\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_{i}x_{i+1}+x_{i+1}^{2})\cdot(1-x_{n}x_{n+1}+x_{n+1}^{2})\cdot(1-x_{n+1}x_{1}+x_{1}^{2})\ge
↪ 1\end{aligned}$$
只需证明：$$(1-x_{n}x_{n+1}+x_{n+1}^{2})\cdot(1-x_{n+1}x_{1}+x_{1}^{2})\ge 1-x_{n}x_{1}+x_{1}^{2}$$
重设x_{1},x_{n},x_{n+1}为a,b,c，即证：对$a,b,c\in[0,1]$，有$$(1-bc+c^{2})(1-ca+a^{2})\ge 1-ab+a^{2}\iff(1-ac)(a-c)(b-c)\ge
↪ 0$$
由 $a,c\in[0,1]$ 知 $1-ac\ge 0$，故只需证：$(a-c)(b-c)\ge 0$.
这不一定成立，但可以在开始时，不妨设 $c=x_{n+1}=\min\limits_{1\le i\le n+1}\{x_{i}\}$.

这样，$x_{1}\ge x_{n+1}$，$x_{n}\ge x_{n+1}$，$(a-c)(b-c)\ge 0$.
由数学归纳法即证．\end{proof}