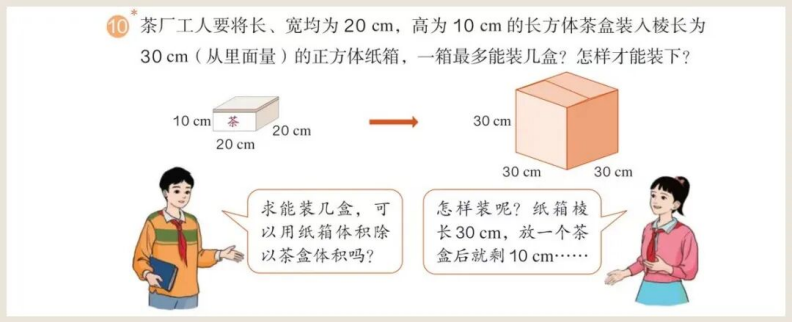
从五年级数学课本上的一道思考题到年度优秀 puzzle

2026-07-30　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7866165f6b8b0598

先看五年级数学课本上的一道原题：



茶盒长、宽都是 20 cm，高是 10 cm；纸箱里面是一个棱长 30 cm 的正方体。最多能装几盒？

很多同学会先算体积：

$30 \times 30 \times 30 = 27000,\qquad 20 \times 20 \times 10 = 4000.27000 \div 4000 = 6.75.$

所以，**7 盒肯定装不下，最多只能考虑 6 盒**。

但这里还有一个小陷阱：体积够，不代表形状一定摆得下。比如一把很长的尺子，体积很小，却可能塞不进一个短盒子。

因此，完整解答要做两件事：

1. 用体积说明不能超过 6 盒；
2. 画出一种摆法，证明 6 盒真的能装下。

这道题最聪明的想法不是先摆六只茶盒，而是先安排三个空格。

一、第一步：把厘米变成小方格

把 10 cm 看成 1 个长度单位：

- 茶盒变成 $2 \times 2 \times 1$ 的小长方体；
- 纸箱变成 $3 \times 3 \times 3$ 的大正方体。

大正方体里一共有

$3 \times 3 \times 3 = 27$

个单位小方块。

一只茶盒占

$2 \times 2 \times 1 = 4$

个单位小方块。六只茶盒一共占

$6 \times 4 = 24$

个单位小方块。

所以装好以后，一定会剩下

$27 - 24 = 3$

个单位空格。

现在问题变得更清楚了：

怎样放六个 $2 \times 2 \times 1$ 长方体，并留下三个空格？

二、第二步：把“奇偶”想成“能不能成双”

把大正方体横着切成上、中、下三层。每一层都是 3×3，共有 9 个小格。

一只茶盒碰到某一层时，只可能占：

0 格、2 格或 4 格.

这些格子都能两两配对，所以都是**偶数**。

可是，一层一共有 9 格。9 是奇数，不能全部两两配对。因此，无论怎样摆茶盒，每一层都必须留下奇数个空格。

三层合起来一共只有 3 个空格，所以只能是：

上层 1 个，中层 1 个，下层 1 个。

把纸箱换个方向看，道理完全一样：

- 左、中、右三层，各有 1 个空格；
- 前、中、后三层，各有 1 个空格；
- 下、中、上三层，各有 1 个空格。

因此，三个空格不能挤在同一层、同一排或同一列里。

三、第三步：先摆空格，再摆茶盒

既然三个空格在三个方向上都要错开，一个很整齐的选择是把它们放在一条**体对角线**上：

- 一个空格放在下面的角上；
- 一个空格放在正中心；
- 一个空格放在上面的相对角上。

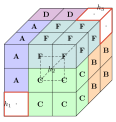
这一步不是凭空猜测。它同时满足了“每个方向的三层各有一个空格”，而且给六只茶盒留下了对称、好安排的空间。

也可以用“第几列、第几排、第几层”检查。三个空格分别放在 $(1,1,1)$、$(2,2,2)$、$(3,3,3)$：三个方向上都正好用到 1、2、3 各一次。

接下来再围着这三个空格摆茶盒，就容易多了。

四、第四步：照着立体图完成构造

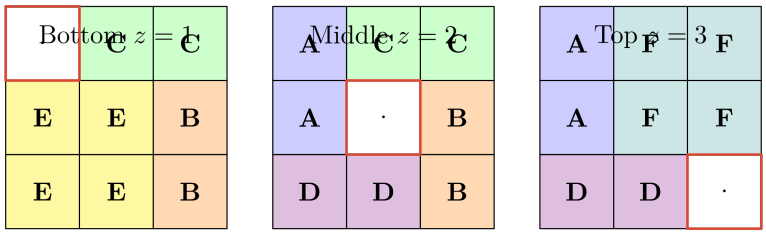
下图是一种完整摆法。A-F 表示六只茶盒，h1、h2、h3 表示三个单位空格。



观察三个方向：

- A、B 是一组，方向相同；
- C、D 是一组，方向相同；
- E、F 是一组，方向相同；
- 三组茶盒的方向两两垂直。

也可以把立体图切成三层来检查：



· 表示空格；相同字母的 4 格属于同一只茶盒（$2\times2\times1$ 长方体）.

“ · ”表示空格，相同字母的四个小格属于同一只茶盒。

底层 z=1　　中层 z=2　　顶层 z=3

C C ·　　C C B　　E E B

A F F　　A · B　　E E B

A F F　　A D D　　· D D

检查时只要看两件事：

1. A-F 每个字母都出现 4 次；

2. 同一个字母的 4 格连在一起，组成一个 $2\times2\times1$ 长方体。

所以，六只茶盒确实能够装下。

最多能装 6 盒。

五、为什么这个答案是完整的？

数学题中的“最多”要同时证明两件事：

- **再多不行：**
  7 盒的总体积超过纸箱体积；
- **这个数能做到：**
  立体图给出了 6 盒的真实摆法。

只算体积，得到的是“最多可能有 6 盒”；加上构造图，才能确定答案就是 6 盒。

可以把整条思路记成四句话：

先缩小尺寸，把问题变成小方格；
再算空格，发现一共剩 3 格；
再看奇偶，知道每层恰好空 1 格；
最后构造，把空格放在体对角线上。

六、挑战角：把纸箱变大

考虑用 $1\times2\times2$ 小长方体装一个 $n\times n\times n$ 大正方体。

当 n 是偶数

可以把大正方体分成许多 $2\times2\times2$ 小正方体。每个小正方体正好能放两个 $1\times2\times2$ 长方体，因此可以完全填满。

例如，$4\times4\times4$ 正方体需要

$4^3\div4=16$

个小长方体。

当 n 是奇数

每个 $n\times n$ 切片都有奇数个小格，而每块长方体在切片中占偶数格，所以每层至少留下 1 个空格。一共有 n 层，至少要留下 n 个空格。

因此，长方体的数量最多是

$\frac{n^3-n}{4}$.

这个式子给出的是上限；要说明上限一定能达到，还需要另外画出摆法。对 $n=3$，前面的构造已经证明 6 块可以做到。

七、Casino 谜题解析：难点不只是“放得下”



2018 年，Volker Latussek 设计的 **Casino** 获得 Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition 的 Puzzle of the Year、Jury Grand Prize 和 Puzzlers' Award。它的任务是把六枚相同的木圆片全部装进盒子，不能有圆片露出盒口。

1. 为什么五枚容易，第六枚总是进不去？

盒子里面的空间其实够大。真正的障碍是盒口两边的木条，它们像两道矮门槛：圆片在盒内可能有合适的位置，却未必能沿着一条不碰门槛的路线到达那里。

所以 Casino 同时有两个问题：

1. 六枚圆片最后应该怎样排；
2. 六枚圆片要按什么顺序、经过什么动作到达终点。

茶盒题主要研究第一个问题；Casino 把第二个问题也加入了谜题。

2. 最常见的错误：把前五枚摆得太整齐

很多人会把前五枚一枚一枚放到自己认为的“最终位置”。这样看起来很整齐，却把盒口下方的活动空间全部占掉了。第六枚虽然只差一点点，却再也没有转身和下降的通道。

这说明：

> **前五枚能放好，不代表它们现在就应该放好**。

3. 解法核心：预装、留路、一起归位

Casino 的关键不是用力挤，也不是依靠手快，而是一个有顺序的“预装”动作：

1. **先放入几枚圆片，但暂时不要让它们全部躺到最终位置**。它们要保持可以滑动或转动的状态；
2. **故意留下通道**。让最后一枚圆片还能经过盒口进入盒内；
3. **把最后一枚送入**。此时盒中的圆片看上去可能还很乱；
4. **再让几枚圆片联动**。通过一次有计划的滑动、转动或下落，让预先放入的圆片和最后一枚一起进入最终位置。

解谜者常把这种方法叫作 **pre-loading（预装）**：某些零件先进入盒中，但先不完成任务，等关键零件也进来以后，再一起归位。

4. Casino 为什么是一个好谜题？

它让人产生三个连续的想法：

- “盒子这么大，六枚一定很容易装进去。”
- “五枚很容易，可第六枚为什么总差一点？”
- “原来前面的圆片不能先放死，要给最后一步留下活动空间！”

它和茶盒题共同告诉我们：

装填问题不仅要安排物体，也要安排空隙和顺序。

茶盒题中的空隙决定最终构造；Casino 中的空隙还要在装入过程中不断移动，成为圆片通过盒口的“临时通道”。这正是 Casino 最精彩的地方。