2026 年中国女子数学奥林匹克第一天试题解答

2026-08-13 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_78767525d4bef916

手稿

第 1 题

题目

称正整数 n 是好的，如果其质因子均不超过 $\sqrt{n}$. 证明：存在 2026 个互质的好数，使得其中任意两个之差也为好数.

解答（PDF 中已展开）

解答

取奇质数 $p_1 < p_2 < \cdots < p_{2026}$，满足 $p_{i+1} > 2p_i$，令 $N_i = p_i^2$ 即可. 验证如下：

显然 N_i 两两互质且都是好数.

任取 $p > q$ 为其中两个质数，则 $p > 2q$. 若素数

$r \mid p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$,

则 $r \mid p-q$ 或 $r \mid p+q$. 前者有

$r \le p - q < \sqrt{p^2 - q^2}$;

后者因 $p+q > 2$ 为偶数,

$r \le \frac{p+q}{2} < \sqrt{p^2 - q^2}$,

其中最后一个不等式由

$4(p^2 - q^2) - (p+q)^2 = (p+q)(3p - 5q) > 0$

得到. 故任意两数之差也是好数.

第 2 题

题目

给定正整数 n，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}n(n-1), \qquad \sum_{i=1}^{n} i a_i = \frac{1}{6}n(n^2-1).$

对 $1 \le k \le n-1$，记

$D_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i - \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} a_i.$

求 $\min\limits_{1 \le k \le n-1} D_k$ 的最大值.

解答（PDF 中已展开）

解答

易验证：

$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\left(D_k - \frac{n}{2}\right) = 0.$

各权 $k(n-k) > 0$，故

$\min_{1\le k\le n-1} D_k \le \frac{n}{2}.$

取等：

$a_k = n - k \qquad (1 \le k \le n).$

第 3 题

题目

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC > 90^\circ$，D 是 A 关于 BC 的对称点．点 P 在 AB 的延长线上，$\angle ACP$ 的平分线交 AB 于点 X．边 BC 上的点 Q 满足

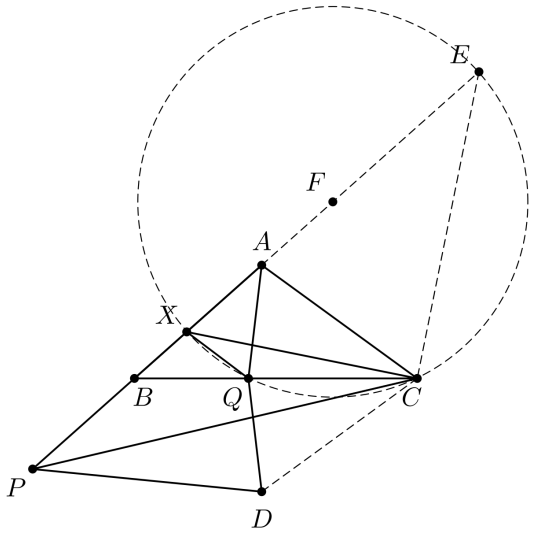
$\angle XQB + \angle AXC = 90^\circ.$

解答（PDF 中已展开）

证明：

$\angle PDQ + \angle BAC = 180^\circ.$

作图



解答

设 $\angle ACP$ 的外角平分线交直线 AB 于 E. 则

$\frac{AX}{XP}=\frac{AE}{EP}=\frac{AC}{CP}=k.$

故 C,X,E 在以 A,P 为定点、比值 k 的阿氏圆 Γ 上；XE 为其直径，设圆心为 F.

由 $\angle CEX=90^\circ-\angle AXC=\angle BQX$ 知 $Q\in\Gamma$. 故 $FQ=FX$，由阿氏圆的性质：

$\frac{AF}{FQ}=k=\frac{AC}{CP}=\frac{CD}{CP}.$

又

$\angle PCD=\angle ACB-\angle BCP=2\angle BCX=\angle AFQ.$

所以

$\triangle FAQ\sim\triangle CDP,$

从而 $\angle FAQ=\angle CDP$，因此

$$\begin{aligned}\angle PDQ=&\angle CDP-\angle CDQ\\=&\angle FAQ-\angle CAQ\\=&\angle CAE\\=&180^\circ-\angle BAC.\end{aligned}$$

证毕.

第 4 题

题目

设整数 $n\geq 3$. 在正 n 边形的 n 个顶点上各有一个人，一次交换指相邻两个顶点上的人互换位置，其余 $n-2$ 个人不动. 经过 m 次交换后，每个人都到过所有顶点，且最终回到初始状态. 求 m 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答

把交换过程画成圆柱上的轨迹. 设第 i 个人的净绕行数为 $w_i\in\mathbb{Z}$（规定正方向）. 则由每一次操作位移和为 0 知：

$\sum_{i=1}^{n}w_i=0.$

- 若 $w_i\neq 0$，则第 i 人至少移动 $n|w_i|$ 次；
- 若 $w_i=0$，遍历全部顶点再返回，至少移动 $2(n-1)$ 次.

此外，任意 2 人 i,j 的轨迹至少相交 $|w_i-w_j|$ 次，即 2 人至少直接交换这么多次.

若 n 为偶数，每个人至少移动 n 次，故 $2m\geq n^2$ 即 $m\geq\dfrac{n^2}{2}$.

若 n 为奇数，记 $n=2k+1$. 记 $w_1,\cdots,w_n$ 中共有 t 个 0，令

$S=\sum_{w_i>0}w_i=-\sum_{w_i<0}w_i.$

于是 $m \geq nS + t(n-1)$，且 $S \geq \left\lceil \dfrac{n-t}{2} \right\rceil$.

(1) $t \geq 2$ 时，分 t 的奇偶讨论可得：$m \geq 2k(k+2)$.

(2) $t = 1$ 时，$S \geq k$. 若 $S > k$，则

$m \geq n(k+1) + 1 \cdot (n-1) > 2k(k+2)$.

若 $S = k$，其余 $2k$ 个 w_i 恰为 k 个 1 和 k 个 -1. 正负两类之间至少有 $2k^2$ 次交换；又零绕行者至少参加 $2(n-1) = 4k$ 次交换，故

$m \geq 2k^2 + 4k = 2k(k+2)$.

(3) $t = 0$ 时，$S \geq k+1$. 若 $S > k+1$，则

$m \geq n(k+2) > 2k(k+2)$.

若 $S = k+1$ 时，只能是 $k+1$ 个 1，$k-1$ 个 -1，1 个 -2（或全体变号）. 于是

$m \geq 2(k+1)(k-1) + 3(k+1) + (k-1) = 2k(k+2)$.

故总有 $m \geq 2k(k+2) = \dfrac{(n-1)(n+3)}{2}$.

构造

若 $w_i \in \mathbb{Z}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 0$，在圆柱上取 n 条一般位置的单调轨迹，使第 i 条净绕行 w_i 圈. 按交点由下至上依次执行交换操作. 任意 2 条轨迹恰相交 $|w_i - w_j|$ 次，故总交换数为 $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} |w_i - w_j|$.

n 偶时，取 w_i 为 $\dfrac{n}{2}$ 个 1，$\dfrac{n}{2}$ 个 -1；

n 奇时，取 w_i 为 $\dfrac{n+1}{2}$ 个 1，$\dfrac{n-3}{2}$ 个 -1，1 个 -2.

综上

$$m_{\min} = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2}, & n\text{为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)(n+3)}{2}, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$