2021 年伊比利亚美洲大学生数学竞赛

2021-12-04 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_78d5c1bdc55e41fb

1. 对每个 $0<\alpha<1$，记 $R(\alpha)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中以 $(0,1-\alpha)$，$(\alpha,0)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 和 $(0,1)$ 为顶点的凸五边形内部区域. 设 R 为同时属于所有 $R(\alpha)(0<\alpha<1)$ 的点组成的集合，即 $R=\bigcap\limits_{0<\alpha<1} R(\alpha)$. 求 R 的面积.

2. 设正整数 $r>s$. $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为两个不同的非常数实系数多项式，且满足对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有 $P(x)^r-P(x)^s=Q(x)^r-Q(x)^s$. 求证：$(r,s)=(2,1)$.

3. 设 m, n, N 为正整数，$\mathbb{Z}_N=\{0,1,\cdots,N-1\}$ 为模 N 的一个完全剩余系. 考虑一个 $m\times n$ 的表格，其每个单元格中均填入了 $\mathbb{Z}_N$ 中的一个元素. 在每次操作中，可以选择某个元素 $g\in\mathbb{Z}_N$，并选择表格中的某个单元格，将其所在行、列的所有元素均加上 g（所得结果模 N）. 求证：若 N 和 $m-1$，$n-1$，$m+n-1$ 都互素，则表格中元素的任意初始排列都可以通过有限次操作得到任意其它排列.

4. 设 $\mathbb{Z}^+$ 为正整数集.

   a) 求证：恰好存在一个函数 $f\colon \mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$，严格递增，且满足对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$，都有 $f(f(n))=2n+1$.

   b) 对于 **a** 中的函数，求证：对于任意 $n\in\mathbb{Z}^+$，都有 $\dfrac{4n+1}{3}\le f(n)\le\dfrac{3n+1}{2}$.

   c) 求证：对于 **b** 中的不等式两边的不等式，均有无数个正整数 n，使得等号成立.

5. 对每个正整数 n，设 $s(n)$ 为 n 的质因数分解中，71 和 97 的次数之和. 例如：$s(2021)=s(43\cdot47)=0$，$s(488977)=s(71^2\cdot97)=3$. 定义 $f(n)=(-1)^{s(n)}$，求证：极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{n}$ 存在，并求出它的值.

6. 设实数 $0\le a<b$. 求证：对任意整数 $n\ge0$，不存在连续函数 $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$，使得 $\int_a^b f(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x>0$，且 $\int_a^b f(x)x^{2n+1}\,\mathrm{d}x<0$.