2021 年普林斯顿数学竞赛（PUMaC）个人赛决赛

2022-04-05　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_78d5ecc8f9b93f62

A 组

求证：对任意正整数 n，n^2-n+1 没有 $6k+5$（$k\in\mathbb{Z}_+$）形式的质因子.

四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ，E 为对角线 BD 的中点. I_1，I_2，I_3，I_4 分别为 $\triangle ABE$，$\triangle ADE$，$\triangle BCE$，$\triangle CDE$ 的内切圆圆心. 求证：$\triangle AI_1I_2$ 和 $\triangle CI_3I_4$ 的外接圆与 Γ 的两个交点构成一组对径点.

注：对圆 C 上的两点 X 和 Y，称 X 和 Y 为一组对径点，即 XY 为 C 的一条直径.

Alice 和 Bob 进行一个游戏，从一个长度为 2022 的二进制字符串 b 开始. 在每一回合中，字符串最右边的数字被删除. 如果被删除的数字是 1，Alice 在最左边加上一个她想要的数字；否则，Bob 在最左边加上一个他想要的数字.

Alice 需要在最短的回合内将字符串 b 变为全是 0，即 $\underbrace{00\cdots0}_{2022个0}$；而 Bob 需要让该回合数变得尽可能大，或者完全阻止 Alice 达成目标.

(a) 如果两人都完成得足够好，是否存在字符串 b，使得 Bob 可以完全阻止 Alice 达成目标.

(b) 如果 (a) 的答案是肯定的，求出所有这样的字符串 b；如果 (a) 的答案是否定的，求出 Alice 达成目标的最大回合数，并求出达到最大回合数时的字符串 b.

B 组

1. a，b，c 为区间 $[0,1]$ 中的实数，且满足 $ab+c\le 1$. 求 $a+b+c$ 的最大值.
2. 设 p 为奇质数. 求证：对任意整数 k，存在整数 a 和 b，使得 $p\mid a^2+b^2-k$.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 C_0 为点 C 到 AB 的垂足，点 B_0 为点 B 到 AC 的垂足. 设 Γ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，E 为 Γ 上一点，且满足 $AE\perp BC$. 设 M 为 BC 的中点，G 为 EM 和 Γ 的第二个交点. T 为 Γ 上一点，且满足 TG 平行于 BC. 求证：T，A，B_0，C_0 四点共圆.