平移、投影与 Cauchy：一类二次型不等式的处理方法

2026-08-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_79a0d7692082a24c

许多加权二次型不等式虽然具有较复杂的系数形式，其主要结构通常由

$$\sum_i x_i^2,\ \left(\sum_i x_i\right)^2,\ \left(\sum_i a_i x_i\right)^2$$

等少数几个量决定. 处理此类问题的关键，在于识别待证式所依赖的方向，并对常数方向与权方向作适当的正交分解. 当权 a_i 构成等差数列，或关于中点具有成对对称性时，权的中心化会自然引出 $\sum(a_i-\overline{a})^2$；若相应二次型在某一方向上具有平移不变性，还可进一步施加适当的归一化条件. 经过这些处理，原问题常可化为一次 Cauchy 不等式或低维二次型的非负性问题.

本文按照“**中心化 → 平移归一化 → 正交投影**”的顺序展开. 首先建立中心化 Cauchy 不等式，并给出共同平移下施加 $\sum x_i=0$ 归一化条件的严格前提；随后讨论沿任意方向的平移不变性，并借助二阶、三阶 Gram 行列式说明其投影结构. 最后通过三道例题分别讨论整体平移不变、沿常数方向完成平方以及投影后处理最优参数三类情形.

除特别说明外，本文中的变量均为实数.

中心化 Cauchy 与常数方向的正交分解

设

$$\overline{x}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i,\qquad \overline{a}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i.$$

则

$$\sum_{i=1}^m (x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^m x_i^2-\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2,$$

且由于 $\sum_{i=1}^m (a_i-\overline{a})=0$，有

$$\sum_{i=1}^m (a_i-\overline{a})x_i=\sum_{i=1}^m (a_i-\overline{a})(x_i-\overline{x}).$$

对两个中心化后的向量应用 Cauchy，即得下述结论.

性质 1（中心化 Cauchy）. 若 $a_1,\dots,a_m$ 不全相等，则对任意 $x_1,\dots,x_m$，

$$\boxed{\sum_{i=1}^m x_i^2\ge\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2+\frac{\left[\sum_{i=1}^m (a_i-\overline{a})x_i\right]^2}{\sum_{i=1}^m (a_i-\overline{a})^2}.}$$

等号成立当且仅当存在实数 α,β，使

$$x_i=\alpha+\beta a_i\qquad (1\le i\le m).$$

证明. 由 Cauchy，

$$\left[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\overline{a})x_i\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\overline{a})(x_i-\overline{x})\right]^2$$
$$\leq\left[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\overline{a})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x})^2\right].$$

代入前面的恒等式即可.

Cauchy 取等的条件为

$x_i-\overline{x}=\beta(a_i-\overline{a})$,

即 $x_i=\alpha+\beta a_i$.

评注. 若记

$\boldsymbol{e}=(1,\ldots,1)$, $\quad\boldsymbol{a}_0=(a_1-\overline{a},\ldots,a_m-\overline{a})$,

则 $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{a}_0$，而性质 1 可写成

$\|\boldsymbol{x}\|^2\geq\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e})^2}{\|\boldsymbol{e}\|^2}+\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}_0)^2}{\|\boldsymbol{a}_0\|^2}$.

因此，权的中心化等价于将常数向量与权向量正交化.

共同平移与归一化条件

把所有变量同时加上同一个实数 t:

$x_i\longmapsto x_i+t\qquad(1\leq i\leq m)$.

由

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^2-\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x})^2$$

可见，这个方差型二次式在共同平移下保持不变. 若 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_i=0$，则

$$\sum_{i=1}^{m}c_i(x_i+t)=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i$$

也保持不变. 因此，若待证式由这类平移不变量组成，整个待证式就在共同平移下不变.

性质 2（共同平移下的归一化）. 设要证明的命题等价于

$F(x_1,\ldots,x_m)\geq0$,

并且

$F(x_1+t,\ldots,x_m+t)=F(x_1,\ldots,x_m)\qquad(\forall\,t\in\mathbb{R})$.

若变量的定义域在共同平移下也保持不变，则可在证明中施加归一化条件

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}x_i=0}.$$

证明. 取

$t=-\overline{x}=-\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}x_i$.

平移后的变量仍在定义域内，且变量和为 0；由平移不变性，待证式的值没有改变.

评注. 上述归一化须同时满足两个前提：**整个待证式**在共同平移下保持不变，且变量的定义域在该平移下保持封闭. 例如，当题目要求 $x_i > 0$ 时，将平均值平移至 0 后一般不能保证各变量仍为正数，因此不能据此施加 $\sum x_i = 0$ 的归一化条件.

从向量角度看，

$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 = \|P_{\boldsymbol{e}^\perp}\boldsymbol{x}\|^2$.

共同平移不改变该量，其原因在于该量仅由 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{e}^\perp$ 上的正交投影决定. 归一化条件 $\sum x_i = 0$ 在几何上相当于沿 $\boldsymbol{e}$ 方向将 $\boldsymbol{x}$ 平移至 $\boldsymbol{e}^\perp$.

任意方向的平移不变性与正交投影

共同平移是沿 $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)$ 方向移动. 更一般地，固定非零向量 $\boldsymbol{v}$，定义

$Q_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})^2$.

直接展开可得

$$\boxed{Q_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) = Q_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})} \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R}).$$

另一方面，

$Q_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{v}\|^2 \left\|\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}\right\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2\|P_{\boldsymbol{v}^\perp}\boldsymbol{x}\|^2$.

因此 $Q_{\boldsymbol{v}}$ 只由 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}^\perp$ 上的投影决定.

若**整个待证式**在

$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}$

下不变，变量的定义域也沿该方向保持不变，且需要将线性量 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}$ 化为 0，只要 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \neq 0$，就可取

$t = -\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}$.

共同平移对应于 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}$ 的特殊情形.

评注. 若仅有待证式中的某一部分（例如 $Q_{\boldsymbol{v}}$）在 $\boldsymbol{v}$ 方向的平移下保持不变，则该局部不变性不足以支持对整个命题施加归一化条件. 此时仍可作换元 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + t\boldsymbol{v}$ 以化简 $Q_{\boldsymbol{v}}$，同时须对其余各项作相应改写. 例 3 属于此类情形.

投影 Cauchy 与 Gram 行列式

先回顾二阶情形. 若

$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m), \qquad \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m),$

则 Lagrange 恒等式给出

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le m} (a_i b_j - a_j b_i)^2}.$$

恒等式右端为平方和，故其非负性即给出 Cauchy；左端同时等于二阶 Gram 行列式

$$\det\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{a}\|^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \|\boldsymbol{b}\|^2\end{pmatrix},$$

因此，Lagrange 恒等式、二阶 Gram 行列式的非负性与 Cauchy 不等式分别给出了同一非负结构的平方和表示、行列式表示与不等式表示.

以下固定非零向量 $\boldsymbol{v}$，把 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}$ 都投影到 $\boldsymbol{v}^{\perp}$：

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}-\tfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v},\qquad \boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}-\tfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}.$$

对 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0$ 应用 Cauchy，可得如下投影形式.

性质 3（投影 Cauchy）. 对任意向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}$ 与非零向量 $\boldsymbol{v}$，

$$\begin{aligned}&\left[\|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})^2\right]\left[\|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2\right]\\ &\qquad\ge\left[\|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\right]^2.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 线性相关.

证明. 由投影公式，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{x}_0\|^2&=\|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})^2,\\ \|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{u}_0\|^2&=\|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2,\\ \|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{u}_0)&=\|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

将这三式代入 $\|\boldsymbol{x}_0\|^2\|\boldsymbol{u}_0\|^2\ge(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{u}_0)^2$ 即得结论. 取等时 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0$ 线性相关，这等价于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 线性相关.

评注. 若记三阶 Gram 行列式

$$D=\det\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} & \|\boldsymbol{u}\|^2 & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \|\boldsymbol{v}\|^2\end{pmatrix},$$

则把前两行、列中沿 $\boldsymbol{v}$ 的分量消去，可得

$$D=\|\boldsymbol{v}\|^2\left[\|\boldsymbol{x}_0\|^2\|\boldsymbol{u}_0\|^2-(\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{u}_0)^2\right]\ge 0.$$

性质 3 两端之差等于 $\|\boldsymbol{v}\|^2D$. 若把三个向量写成 $\mathbb{R}^m$ 中的坐标，Cauchy–Binet 公式还给出

$$D=\sum_{1\le i<j<k\le m}\begin{vmatrix}x_i&x_j&x_k\\u_i&u_j&u_k\\v_i&v_j&v_k\end{vmatrix}^2,$$

其中 $m<3$ 时右边为空和 0. 因此，二阶与三阶 Gram 行列式均可表示为相应子式的平方和；在本文所涉及的情形中，其不等式内容可统一归结为对正交投影应用 Cauchy.

对 $n\ge 2$，取

$$\boldsymbol{v}=(1,2,\dots,n),\qquad \boldsymbol{u}=(1,1,\dots,1),$$

并记

$$S=\sum_{i=1}^{n}x_i,\qquad T=\sum_{i=1}^{n}ix_i.$$

利用

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

性质 3 化为

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - T^2 \geq \frac{n+1}{3(n-1)} \cdot [(2n+1)S - 3T]^2}$$

此时 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 线性无关，故等号成立当且仅当

$x_i = \alpha + \beta i.$

例 1：共同平移的应用

题目.（1999 年 CTST）设 n 为正整数，$x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ 是实数. 证明

$\sum_{i=0}^{2n} x_i^2 \geq \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{i=0}^{2n} x_i \right)^2 + \frac{3}{n(n+1)(2n+1)} \left(\sum_{i=0}^{2n} (i-n) x_i \right)^2$.

解. 令

$\overline{x} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} x_i$, $y_i = x_i - \overline{x}$.

作上述共同平移后，有

$\sum_{i=0}^{2n} y_i = 0$, $\sum_{i=0}^{2n} (i-n) y_i = \sum_{i=0}^{2n} (i-n) x_i$,

因为 $\sum_{i=0}^{2n} (i-n) = 0$. 同时

$\sum_{i=0}^{2n} y_i^2 = \sum_{i=0}^{2n} x_i^2 - \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{i=0}^{2n} x_i \right)^2$.

再由

$\sum_{i=0}^{2n} (i-n)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

和 Cauchy，

$\left[\sum_{i=0}^{2n} (i-n) y_i \right]^2 \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \sum_{i=0}^{2n} y_i^2$,

整理即得所证不等式.

等号成立当且仅当 $y_i = \beta(i-n)$，因此全部等号情形为

$$\boxed{x_i = \alpha + \beta(i-n)}.$$

评注. 该证明体现了性质 2 的基本用法：先沿常数方向选取满足变量和为 0 的代表元，再应用 Cauchy. 从中心化的角度看，也可直接将性质 1 应用于权 $a_i = i$.

延伸：2003 年 IMO 第 5 题. 为避免与本例的参数 n 混淆，把该题中的项数记为 m. 题目为：设整数 $m > 2$，且

$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_m$,

证明

$\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |y_i - y_j| \right)^2 \leq \frac{2(m^2-1)}{3} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (y_i - y_j)^2$,

并证明等号成立的充要条件是 $y_1,\dots,y_m$ 成等差数列.

由于数列已按不减次序排列，

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|y_i-y_j|=2\sum_{k=1}^{m}(2k-m-1)y_k,$

而

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(y_i-y_j)^2=2m\sum_{k=1}^{m}y_k^2-2\left(\sum_{k=1}^{m}y_k\right)^2.$

权 $2k-m-1$ 的和为 0，且

$\sum_{k=1}^{m}(2k-m-1)^2=\frac{m(m^2-1)}{3}.$

因此，该题可直接化为性质 1. 若 $m=2n+1$ 且令 $i=k-1$，则

$2k-m-1=2(i-n),$

与例 1 的权 $i-n$ 相差常数因子 2. 因此，两题所对应的中心化 Cauchy 具有相同的权结构.

例 2：沿常数方向的完成平方

题目.（2018 Balkan MO Shortlist A6）设 n 为正整数，$x_1,x_2,\dots,x_n$ 为实数. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ge\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\frac{12}{n(n+1)(n+2)(3n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n}ix_i\right)^2.$$

分析. 原不等式不具有共同平移不变性，因此不能据此施加 $\sum x_i=0$ 的归一化条件. 本题中的平移参数由关于该参数的二次式取极小值确定，其依据为完成平方. 对任意实数 c，

$c^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2c\sum_{i=1}^{n}x_i+(n+1)c^2.$

右端关于 c 的二次式在

$c=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i$

处取得最小值.

解. 取上述 c，令 $y_i=x_i-c$. 则

$\sum_{i=1}^{n}y_i=c,$

并且

$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=c^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2.$

又有

$\sum_{i=1}^{n}i^2+\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12},$

以及

$\sum_{i=1}^{n}ix_i=c\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}iy_i.$

因此原不等式等价于

$$\left(c^2+\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2+\sum_{i=1}^{n} i^2\right] \geq \left(c\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} iy_i\right)^2,$$

所得不等式即为向量

$$(c, y_1, \ldots, y_n) \text{与} \left(\sum_{i=1}^{n} i, 1, 2, \ldots, n\right)$$

之间的 Cauchy 不等式.

等号成立时两向量成比例，因此

$$\boxed{x_i = t\left(\frac{n(n+1)}{2}+i\right)} \qquad (1 \leq i \leq n),$$

其中 $t \in \mathbb{R}$.

评注. 上述换元沿 $(1, \ldots, 1)$ 方向进行，其依据与性质 2 不同. 原命题在该方向上不具平移不变性；参数 c 由二次式的极小值条件确定，并使 $\sum x_i^2 - \frac{1}{n+1}(\sum x_i)^2$ 化为适于应用 Cauchy 的平方和.

例 3：投影 Cauchy 与判别式

题目.（数之谜原创代数 238）给定整数 $n \geq 2$. 求最小的实数 λ，使对任意 $x_1, \ldots, x_n$ 都有

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} ix_i\right)^2+\frac{n(n+1)}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} ix_i\right).$$

解. 记

$$S=\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad T=\sum_{i=1}^{n} ix_i.$$

由性质 3 的特殊形式，

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - T^2 \geq \frac{n+1}{3(n-1)}\left[(2n+1)S-3T\right]^2.$$

因此，若

$$\frac{n+1}{3(n-1)}\left[(2n+1)S-3T\right]^2+\lambda S^2-\frac{n(n+1)}{n-1}ST \geq 0$$

对任意实数 S, T 成立，则原不等式成立.

将左端展开，并视为关于 T 的二次式：

$$\frac{3(n+1)}{n-1}T^2-\frac{(n+1)(5n+2)}{n-1}ST+\left[\lambda+\frac{(n+1)(2n+1)^2}{3(n-1)}\right]S^2.$$

由于关于 T 的二次项系数为正，该二次式恒非负的充要条件为判别式不大于 0. 计算得

$$\Delta=\frac{(n+1)S^2}{(n-1)^2}\left[n(n+1)(9n+4)-12(n-1)\lambda\right].$$

因此

$$\lambda \geq \lambda_0 := \frac{n(n+1)(9n+4)}{12(n-1)}$$

时，原不等式恒成立.

为验证该下界的最优性，取

$$x_i = i-\frac{n(n+1)}{2(2n-1)}.$$

因为 x_i 是 i 的一次函数，性质 3 取等；并且

$S=\frac{n(n^2-1)}{2(2n-1)}\neq 0, \qquad T=\frac{5n+2}{6}S.$

将这组 S,T 代入上述二次式，所得值为

$(\lambda-\lambda_0)S^2.$

当 $\lambda<\lambda_0$ 时，该值为负，故原不等式不能对任意实数组成立．由此可知

$$\boxed{\lambda_{\min}=\frac{n(n+1)(9n+4)}{12(n-1)}}.$$

评注．本题中的二次型

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} ix_i\right)^2$$

该二次型沿 $\boldsymbol{v}=(1,2,\dots,n)$ 方向平移不变．原不等式整体不具此性质，故不能由此归一化为 $\sum x_i=0$．性质 3 的证明先消去有关向量在 $\boldsymbol{v}$ 方向上的分量，再应用 Cauchy.

方法辨析与应用步骤

上述例题均涉及沿某一方向改变变量．根据所依据的不变性或极值结构，可区分为以下三类：

1. **整个待证式具有平移不变性．**若定义域在该平移下亦保持不变，则可沿该方向选取满足附加线性条件的代表元．例 1 中的 $\sum x_i=0$ 即为此类归一化.
2. **只有某个二次型沿特定方向不变．**此时平移仅作为变量替换使用，待证式中的其余项须同步改写；例 3 属于此类情形.
3. **待证式不具平移不变性，但可借助平移参数完成平方．**例 2 中的参数 c 由二次式的极小值条件确定，用于将相关二次型表示为平方和.

从向量角度看，中心化

$\boldsymbol{a}=\overline{a}\,\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{a}-\overline{a}\,\boldsymbol{e}), \qquad \boldsymbol{a}-\overline{a}\,\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{e},$

可视为对 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}$ 进行一次 Gram–Schmidt 正交化．因此，权的中心化等价于消去权向量在常数方向上的分量.

此外，还可得到如下常用的降维原则．若不等式可写成

$c\|\boldsymbol{x}\|^2\geq\Phi(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}), \qquad c>0,$

若右端仅依赖这两个线性量，则将 $\boldsymbol{x}$ 分解到 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}\}$ 及其正交补后，正交补分量只会增加左端的 $\|\boldsymbol{x}\|^2$，而不改变右端．因此，在求最优常数或讨论等号条件时，可将考察范围限制为

$\boldsymbol{x}\in\mathrm{span}\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}\}, \qquad \text{即} \qquad x_i=\alpha+\beta a_i.$

由此也可解释中心化 Cauchy 与投影 Cauchy 的等号条件为何具有一次函数形式.

对于同时含有

$\sum_i x_i^2, \qquad \sum_i x_i, \qquad \sum_i a_i x_i$

的二次型不等式，可依次进行如下处理：首先将权中心化；其次检验整个命题是否具有可利用的平移不变性；若出现 Q_v 型二次式，则识别其正交投影结构；最后将问题限制在由相关方向张成的一维或二维子空间中.

综上，本文所讨论的方法可概括为：**识别相关方向，实施正交分解，并在降维后应用 Cauchy.**