2021 年浙江省预赛第 9 题的题目错误

2021-05-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_79c5c675ac6f7b5d

2021 年浙江省预赛的第 9 题如下：

题目已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标为 $A(0,0)$，$B(7,0)$，$C(3,4)$，过点 $D(6-2\sqrt{2},3-\sqrt{2})$ 的直线分别与线段 AC，AB 交于 P，Q．若 $S_{\triangle PQC}=\dfrac{14}{3}$，则 $|CP|+|CQ|=$_____.

事实上，这是一道错题．根本不存在满足题意的 P，Q 两点.

一种解法如下：

容易得到 D 为 $\triangle ABC$ 的内心，且内切圆半径为 $r=3-\sqrt{2}$．于是由

$$S_{\triangle PQC}=\frac{1}{2}(CP+CQ)r=\frac{14}{3}$$

可得

$$CP+CQ=\frac{28}{3(3-\sqrt{2})}=\frac{4}{3}(3+\sqrt{2})$$

但由简单的平面几何知识，我们有结论：

$$\begin{aligned}\frac{1}{CP}+\frac{1}{CQ}=&\frac{2\cos\dfrac{\angle ACB}{2}}{CD}\\=&\frac{\sqrt{2+\dfrac{\sqrt{2}}{5}}}{\sqrt{10(2-\sqrt{2})}}\\=&\frac{3\sqrt{2}+2}{10}\end{aligned}$$

由均值不等式：

$$\begin{aligned}CP+CQ\geq&\frac{4}{\dfrac{1}{CP}+\dfrac{1}{CQ}}\\=&\frac{60\sqrt{2}-40}{7}\\\approx&6.41\\>&\frac{4}{3}(3+\sqrt{2})\end{aligned}$$