2022 年高联不等式分析

2024-05-27　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7a08e3f53642aa58

今天来看号称高联史上最难的不等式：2022 年高联 A 卷第三题。

题目：

设 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 是非负整数，同时满足以下条件：

（1）存在正整数 $k \leq 100$，使得 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$，而当 $i > k$ 时，$a_i = 0$；

（2）$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 100$；

（3）$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100} = 2022$.

求 $a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \cdots + 100^2 a_{100}$ 的最小可能值.

分析：

首先来猜测最小值的等号成立条件.

根据题中式子形式：$\sum a_k$、$\sum k a_k$、$\sum k^2 a_k$，容易想到 Cauchy 不等式：

$\sum_{k=1}^{100} k^2 a_k \cdot \sum_{k=1}^{100} a_k \geq \left(\sum_{k=1}^{100} k a_k\right)^2$

但是由于 x_i 均为整数，等号显然无法成立.

但是可以估计取等时 x_i 的分布趋势. 我们使用 Lagrange 恒等式进行分析：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{100} k^2 a_k \cdot \sum_{k=1}^{100} a_k - \left(\sum_{k=1}^{100} k a_k\right)^2 \\
=& \sum_{1 \leq i < j \leq 100} \left(i\sqrt{a_i} \cdot \sqrt{a_j} - j\sqrt{a_j} \cdot \sqrt{a_i}\right)^2 \\
=& \sum_{1 \leq i < j \leq 100} (i-j)^2 a_i a_j
\end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_{k=1}^{100} a_k = 100$，$\sum\limits_{k=1}^{100} k a_k = 2022$ 为定值，为使 $\sum\limits_{k=1}^{100} k^2 a_k$ 尽可能小，需要 $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq 100} (i-j)^2 a_i a_j$ 尽可能小.

我们猜测 $a_1, \cdots, a_{100}$ 中，0 的个数要尽可能多（这是因为非零的 $a_i a_j$ 的个数 C_m^2，以及系数 $(i-j)^2$ 均是二次的，对总和影响会比较大）.

由条件（1）知，所有非零项是连续且不减的.

对非零项的个数从小进行讨论：

（1）只有一项非零，则 $a_i = 100$，$i a_i = 2022$，由 $100 \nmid 2022$ 知不成立.

（2）只有两项非零，设为 a_i, a_{i+1}，则

$$\begin{cases} a_i + a_{i+1} = 100 \\ i a_i + (i+1) a_{i+1} = 2022 \end{cases}$$

消去 a_{i+1} 得：$a_i = 100(i+1) - 2022$. 由于 a_i 为正整数，故 $a_i \geq 100 \times 21 - 2022 = 78$. 但 $a_i \leq a_{i+1} = 100 - a_i$，即 $a_i \leq 50$，故矛盾.

(3) 有三项非零，设为 a_i, a_{i+1}, a_{i+2}，则

$$\begin{cases} a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 100 \\ ia_i + (i+1)a_{i+1} + (i+2)a_{i+2} = 2022 \end{cases}$$

消去 a_{i+1} 得：$a_i - a_{i+2} = 100(i+1) - 2022$.

由 $a_i \leq a_{i+2}$ 知，$i+1 \leq \dfrac{2022}{100}$，结合 i 为整数知 $i \leq 19$.

消去 a_{i+2} 得：$2a_i + a_{i+1} = 100(i+2) - 2022 > 0$，即 $i+2 > \dfrac{2022}{100}$，结合 i 为整数知 $i \geq 19$.

于是只能有 $i = 19$. 此时有

$$\begin{cases} a_{19} + a_{20} + a_{21} = 100 \\ 19a_{19} + 20a_{20} + 21a_{21} = 2022 \end{cases}$$

解得：$a_{20} = 78 - 2a_{19}$，$a_{21} = a_{19} + 22$.

代入 $a_{19} \leq a_{20} \leq a_{21}$ 得：$\dfrac{56}{3} \leq a_{19} \leq 29$，故 $19 \leq a_{19} \leq 29$.

此时

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i < j \leq 100} (i-j)^2 a_i a_j \\ =&a_{19}a_{20} + a_{20}a_{21} + 4a_{19}a_{21} \\ =&a_{19}(78 - 2a_{19}) + (78 - 2a_{19})(a_{19} + 22) + 4a_{19}(a_19 + 22) \\ =&200a_{19} + 1716 \end{aligned}$$

此式关于 a_{19} 递增，故在 a_{19} 取最小可能值 19 时，原式取最小值，此时 $a_{20} = 40$，$a_{21} = 41$.

自此，我们猜出了取等条件.

解答（PDF 中已展开）

答案及构造：

在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{18} = 0$，$a_{19} = 19$，$a_{20} = 40$，$a_{21} = 41$，$a_{22} = a_{23} = \cdots = a_{100} = 0$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{100} k^2 a_k$ 取最小值 40940.

继续分析：

接下来考虑证明 $\sum\limits_{k=1}^{100} k^2 a_k \geq 40940$.

对 $\sum a_k$、$\sum k a_k$、$\sum k^2 a_k$ 的处理，除了无法对整变量依然有效的 Cauchy 不等式外，我们常用局部不等式进行处理.

一个简单例子是：若 $n \in \mathbb{Z}$，则 $n^2 \geq n$.

这个不等式对实数不恒成立，但由于整数具有离散性，$n^2 \geq n \iff n \geq 1$ 或 $n \leq 0$，是对整数 n 恒成立的.

更一般的不等式为：

对 $k,m\in\mathbb{Z}$，有 $(k-m)(k-m-1)\geq 0$.

上式等价于 $k^2\geq(2m+1)k-m(m+1)$. 求和后能够很好地处理 $\sum a_k$、$\sum ka_k$、$\sum k^2a_k$ 的大小关系，且取等可以控制在整数.

在本题中，我们已经猜到取等条件为 a_{19},a_{20},a_{21} 三项非零，故对于其余为零的项，可以比较大胆地放缩.

而对于 a_{19},a_{20},a_{21} 这三项，我们希望上述不等式的放缩误差能尽可能小.

初步想法是 $f(x)=(x-19)(x-21)$，此时 $f(19)=f(21)=0$，$f(20)=-1$，且 $f(i)>0$，$i\leq 18$ 或 $i\geq 22$. 于是 $\sum_{k=1}^{100}f(i)a_i\geq -a_{20}$. 可以继续分析 a_{20} 的大小，完成本题证明.

也可以考虑 $f(x)=(x-19)(x-20)$，$f(x)=(x-20)(x-21)$ 等函数，进行局部放缩，再分析剩下一个变量的范围. 但这些方法都不尽如人意.

我们进行改进，希望能够较好地利用 $a_{19}\leq a_{20}\leq a_{21}$ 这一条件.

设 $f(x)=(x-19)(x-a)$，则 $f(20)=20-a$，$f(21)=2(21-a)$，令 $f(21)=-f(20)>0$ 得 $a=\dfrac{62}{3}$.

这样，$f(x)=(x-19)\left(x-\dfrac{62}{3}\right)$，此时 $f(19)=0$，$f(20)=-\dfrac{2}{3}$，$f(21)=\dfrac{2}{3}$，且 $f(i)>0$，$i\leq 18$ 或 $i\geq 22$. 于是

$\sum_{k=1}^{100}f(i)a_i\geq\dfrac{2}{3}(a_{21}-a_{20})\geq 0$

展开得：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100}k^2a_k\geq&\frac{119}{3}\sum_{k=1}^{100}ka_k-\frac{1178}{3}a_k\\=&\frac{119}{3}\times 2022-\frac{1178}{3}\times 100\\=&40939\frac{1}{3}\end{aligned}$$

结合 $\sum_{k=1}^{100}k^2a_k$ 为整数知：

$$\sum_{k=1}^{100}k^2a_k\geq 40940.$$

于是，$\sum\limits_{k=1}^{100}k^2a_k$ 的最小值为 40940.

自此，我们完成了高联史上最难代数题.

注：

本题第一个难点在于猜到答案，借助 Lagrange 恒等式来猜测取等条件，并从非零项的个数进行分析是比较自然的.

对于离散型不等式，使用类似的局部不等式进行分析是常规操作，本题中所构造的局部不等式非常巧妙，是我第一次做根本无法想出来的，各位读者可以好好体会这个构造.