2023 年英国数学奥林匹克（第一轮）——视频解答

2022-11-21 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7bd44216e3375415

1. 一条路上有编号为 1~n 的房子，其中 n 为三位数．其中恰有 $\frac{1}{k}$ 个编号首位为 2，k 为正整数．求 n 的所有可能值．

2. 正整数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$，$a_2=b$．且对所有正整数 n，都有 $a_{2n+1}=a_{2n}a_{2n-1}$，$a_{2n+2}=a_{2n+1}+4$．设在 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2022} 中共有 m 个完全平方数，求 m 的最大可能值．

3. 在非等腰的锐角三角形 ABC 中，AC、AB 的中点分别为点 B_1、C_1．点 D 在直线 BC 上，且满足 C 在 B、D 之间．点 F 满足 $\angle AFC$ 是直角，且 $\angle DCF=\angle FCA$．点 G 满足 $\angle AGB$ 是直角，且 $\angle CBG=\angle GBA$．求证：B_1，C_1，F，G 四点共线．

4. Alex 和 Katy 在一个由 64 个单元格组成的 8×8 正方形网格上玩游戏．两人轮流行动，从 Alex 开始．在 Alex 的回合，他在一个空格中写下 “A”；在 Katy 的回合，她在两个边相邻的空格中各写下一个 “K”．当一方无法继续时，游戏结束．Katy 的得分为游戏结束时网格中 K 的个数．求 Katy 保证能得到的最高分数．

5. 对任意整数 $n\geq 1$，考虑一个从 1 开始到 n 结束，以互不相同的正整数组成的数列，满足除最后一项外，每一项均整除其后一项，设这样的数列共有 $f(n)$ 个．求证：对任意整数 $N\geq 1$，存在整数 $n\geq 1$，使得 N 整除 $f(n)$．（例如：$f(1)=1$，$f(2)=1$，$f(6)=3$．）

6. 圆 Γ 的半径为 1．直线 l 到 Γ 圆心的距离在 0 到 2 之间．青蛙在 Γ 上选取一个到 l 距离小于 1 的点，并坐在该点上．然后青蛙在圆和直线上来回跳跃，每一跳的距离为 1．如果从 Γ 起跳，则必落在 l 上，反之亦然．求证：有限次跳跃后，青蛙能回到初始点．

点击链接观看视频解答：https://bmos.ukmt.org.uk/solutions/bmo1-2023/