盘点高联预赛中的陈题

2024-05-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7c2e1e9253c2eb22

这两天不少省市都进行了高联预赛，不少同学在考完后来吐槽或报喜：某某题是陈题。

这里做个简单的盘点，欢迎留言补充。

浙江预赛第 9 题：

9. 设实数 $a,b,c\in(0,2]$，且 $b\geq 3a$ 或 $a+b\leq\dfrac{4}{3}$，则 $\max\{b-a,c-b,4-2c\}$ 的最小值为_____.

本题形式上和今年九省联考第 14 题一样

以$\max M$表示数集M中最大的数．设$0<a<b<c<1$，已知$b\geq 2a$或$a+b\leq 1$，则$\max\{b-a,c-b,1-c\}$的最小值为_____.

解析见我当时发的文章：《九省联考第 14 题的最简单做法》

浙江预赛第 11 题：

11. 设 n 为正整数，且 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\mathrm{C}_n^k}{k^3+9k^2+26k+24}=\frac{1}{312}$，则 $n=$_____.

本题为 1997 年加拿大 MO 最后一题

Source: Canadian Mathematical Olympiad - 1997 - Problem 5.



BigSams
6592 posts

May 7, 2011, 11:08 AM • 2 #1

Write the sum $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i\cdot\binom{n}{i}}{i^3+9i^2+26i+24}$ as the ratio of two explicitly defined polynomials with integer coefficients.

This post has been edited 1 time. Last edited by djmathman, Jan 18, 2017, 1:40 AM

浙江预赛第 15 题：

15. 设 $f(x),g(x)$ 均为整系数多项式，且 $\deg f(x)>\deg g(x)$. 若对无穷多个素数 p，$pf(x)+g(x)$ 存在有理根，求证：$f(x)$ 必存在有理根.

本题为 2012 年 IMO 预选题 A4

A4. 设 f,g 是两个整系数非零多项式，且 $\deg f>\deg g$. 若对无穷多个质数 p，多项式 $pf+g$ 有有理根，求证：f 有有理根.

广西预赛第 5 题：

5. 设 x_1,x_2,x_3,x_4 均是正整数，且 $\{x_ix_jx_k\mid 1\leq i<j<k\leq 4\}=\{18,36,54\}$. 则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$_____.

本题为 2019 年中科大自主招生题

8.已知 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{N}$ ，且 $\{x_ix_jx_k|1\leq i<j<k\leq 4\}=\{18,36,54\}$ ，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$ ____

四川预赛第 9 题：

9.（本题满分 16 分）已知 t 为正实数，若曲线 $y=t\cdot e^x$ 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于 A,B 两个不同的点，求证：直线 AB 的斜率 $k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

本题形式上和今年深圳二轮二阶最后一题第（2）问一样

已知曲线 $y=\ln x+a$ $(a\in\mathbb{R})$ 和圆 $O:x^2+y^2=r^2$ $(r\in\mathbb{R},\ r>0)$ 相交于 A,B 两个不同点，记直线 AB 的斜率为 k.

(1) 当 $r=\sqrt{2}$ 时，证明：$a>-1$；

(2) 当 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，证明：$k>\sqrt{2}$.

解析见我当时发的文章：《用代数方法证明深圳中学二轮二阶压轴题》

北京预赛二试第 4 题：

本题为 2003 年 IMO 预选题 N8

N8. 设 p 是质数，A 是由正整数构成的集合，满足：
(1) A 中所有元素的质因数集合恰包含 $p-1$ 个元素；
(2) 对于 A 的任意非空子集，其元素之积不是一个整数的 p 次幂.
求 A 中元素个数的最大值.

最后发表一下个人对陈题的看法：

将一些合适的高考题或模拟题，加以改编作为预赛题，在减少命题人负担的同时，题目质量也有保证，是一种较好的命题方式。

但今年浙江和北京预赛的最后一题，都不约而同地使用了早年的 IMO 预选题，个人认为这是不负责任的表现。