2022 年印度尼西亚区域赛决赛

2022-06-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7c458c7d560f8806

西部地区

1. 不等边的锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，过 A 作 $AA' \parallel BC$ 交 Γ 于点 A'，同理定义点 B'，C'．求证：

$$\min(A'B', B'C', C'A') < \max(AB, BC, CA).$$

2. Kazuma 在黑板上写下三个互异的正整数．每一回合，Megumin 选择其中两个数：m 和 n，将它们擦去，并写上 $n - \gcd(n, m)$ 和 $\operatorname{lcm}(m, n) - n$．若 Megumin 在某一时刻写下 0，则 Megumin 失败．求证：不论开始时 Kazuma 写下何整数，Megumin 都能保证自己不会失败．

3. 非零实数 a，b，c 满足

$$|(a+b)(b+c)(c+a)| = |(a-b)(b-c)(c-a)|,$$

求

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right|$$

的最小值．

4. $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，外心为 O．A' 为 Γ 上不过点 A 的弧 BC 的中点，同理定义点 B'，C'．已知 $B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的内切圆相切于点 X，BC 和 $\triangle ABC$ 的内切圆相切于点 D，且直线 OX 和直线 DA' 平行（或共线）．求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形．

5. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对任意 $m, n \in \mathbb{N}$，$m \mid f(n)$ 当且仅当 $f(m) \mid n$．

东部地区

1. Kiritio 从集合 $\{1, 2, \cdots, 100\}$ 中给 Asna 个不同的正整数，使得对任意正整数 $1 \le j \le 100$，Asna 都能在 Kiritio 给她的 k 个数中取出若干个，使它们的和为 j．求 k 的最小值．

2. 给定正整数 k．定义整数列 $\{a_i\}$ 如下：

a_1，a_2，$\cdots$，$a_k \in \mathbb{Z}$．

对任意 $n \ge k+1$，$a_n = \dfrac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-m}}{m}$，其中 m 为小于 n 且使得 $\dfrac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-m}}{m} \in \mathbb{Z}$ 的最大正整数．

求证：存在正整数 N，使得对任意 $i > N$，$a_i = C$ 为常数．

1. 对锐角 $\triangle ABC$，设 ℓ_A，h_A，m_A 分别为点 A 所对的角平分线，高，中线．同理定义 ℓ_B，h_B，m_B，ℓ_C，h_C，m_C．已知 (ℓ_A, h_B, m_C)，(ℓ_B, h_C, m_A)，(ℓ_C, h_A, m_B) 分别共点，求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形．

2. 判断是否存在无穷正整数列 $\{a_i\}_{i\geq 1}$ 和 $\{b_i\}_{i\geq 1}$，使得对任意不同的正整数 m 和 n，a_m，a_n，b_m，b_n 两两互异，且对任意 $i \in \mathbb{N}$，

$$\varphi(a_i^2+1)\cdot\varphi(a_{i+1}^2+1)=\varphi(b_i^2+1).$$

3. 正实数 a，b，c 满足 $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$，且 $abc=1$．求证：

$$a\sqrt{b^2-bc+c^2}+b\sqrt{c^2-ca+a^2}+c\sqrt{a^2-ab+b^2}\geq a+b+c+\frac{2(a-b)^2}{(a+b+c)^2-3}.$$

2022 年印度尼西亚区域赛决赛——中文翻译