加拿大 CRUX 杂志问题 4671-4680

2021-12-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7ceab90eb44a3c6c

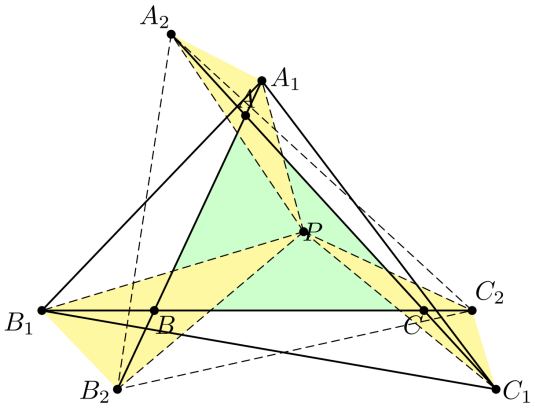
1. 给定 $\triangle ABC$ 以及边 BC 上一点 M，设 r_1，r_2 分别为 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 的内切圆半径. 求 r_1+r_2 取得最大值时点 M 的位置.

2. 有理数 a，b，c 满足

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}=\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

求证：$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 为有理数.

3. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，且 P 不在 $\triangle ABC$ 任意一边所在直线上. 在直线 BA 上取点 A_1，在直线 CA 上取点 A_2，使得 $\triangle PA_1A_2$ 的重心为点 A，类似作出 $\triangle PB_1B_2$ 和 $\triangle PC_1C_2$. 求证：$\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 面积相等.



4. 求所有次数为 $2n$ 的首一多项式 $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$，使其有一个 n 重的复根，且满足 $P(0)=-1$，$P(1)\cdot P(-1)\neq 0$.

5. 正实数 a，b，c 满足 $a^2+b^2+c^2=3$. 求证：

$$2(a^4+b^4+c^4)-(a^3+b^3+c^3)\geq 3abc.$$

1. 设 E 为凸四边形 $ABCD$ 对角线的交点. 过 E 分别作 $\angle AEB$, $\angle BEC$, $\angle CED$, $\angle DEA$ 的角平分线, 与 AB, BC, CD, DA 分别交于点 F, G, H, I. 求证:

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BG}{CG}\cdot\frac{CH}{DH}\cdot\frac{DI}{AI}=1.$$

1. 计算:

$$\int_0^{\infty}\arctan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{x}{x^2+4}dx.$$

1. 设 n 为非负整数, 求下式的闭式表达式:

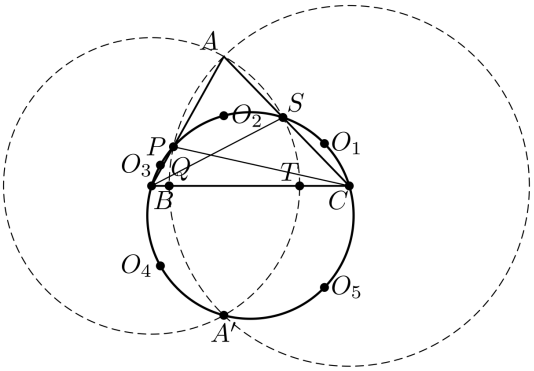
$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{n-2j}\left(\frac{1}{5}\right)^j}{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-j}{n-2j}\left(-\frac{1}{5}\right)^j}.$$

1. 实数列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 满足: $x_1=\dfrac{1}{7}$, $x_2=\dfrac{1}{5}$, 且对于任意 $n\geq 2$, 都有

$$2nx_{n+1}\cdot x_{n-1}=(n+1)x_n\cdot x_{n-1}+(n-1)x_n\cdot x_{n+1}.$$

   求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+x_n\right)^{nx_n}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $|BC|>|AC|>|AB|$. $\odot C_1$ 以 C 为圆心, CA 的长度为半径, 交 AB 于点 P, 交 BC 于点 Q. 类似地, $\odot C_2$ 以 B 为圆心, BA 的长度为半径, 交 AC 于点 S, 交 BC 于点 T. 设 A' 为 $\odot C_1$ 和 $\odot C_2$ 的另一个交点. O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 分别为 $\triangle CST$, $\triangle SAP$, $\triangle PBQ$, $\triangle BA'Q$, $\triangle A'CT$ 的外接圆圆心. 求证: C, O_1, S, O_2, P, O_3, B, O_4, A', O_5 十点共圆.


A
S
O_2
O_1
P
O_3
Q
T
B
C
O_4
O_5
A'