2023 年泰国数学奥林匹克

2023-05-13　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7e7ab4e0f1708659

2023 年泰国数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 集合 A 由 20 个连续正整数组成，且 A 的全体元素之积、全体元素之和均不为 23 的倍数．求证：A 的全体元素之积不为完全平方数．

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90^\circ$，点 D 在边 AB 上（$D \neq A, B$），点 E 在直线 AB 上，且满足 B 为 DE 中点．设 I 为 $\triangle ACE$ 的内心，J 为 $\triangle ACD$ 的 A 所对的旁心．求证：BC 的中垂线平分线段 IJ．

3. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，都有

$$f(x)f(y)f(x-y) = x^2 f(y) - y^2 f(x).$$

4. 一场乒乓球比赛共有 101 名参赛选手，每两名选手恰好比赛一次．在每场比赛中，先获得 11 分者获胜，另一者负．在全部比赛结束时，已知存在比分为 $11:0$ 和 $11:10$ 的比赛．求证：存在三名选手 A,B,C，使得 A,B 中的败者与 A,C 中的败者比分相同，但不同于 B,C 中败者的比分．

5. 设 ℓ 为平面上一条直线，$90^\circ < \theta < 180^\circ$．考虑满足以下条件的任意不同三点 P, Q, R：

(1) P 在 ℓ 上，且 $PQ \perp \ell$；

(2) R 与 Q 在 ℓ 同侧（R 不在 ℓ 上）；

(3) 对 ℓ 上任意两点 A, B，若 $\angle ARB = \theta$，则 $\angle AQB \geq \theta$．

求 $\angle PQR$ 的最小值．

2023 年泰国数学奥林匹克

程国根　译

第二天

6. 设 a,b,c,x,y 均为正实数，且 $abc=1$．求证：

$$\frac{a^5}{xc+yb}+\frac{b^5}{xa+yc}+\frac{c^5}{xb+ya}\geq\frac{9}{(x+y)(a^2+b^2+c^2)}.$$

7. 设 n 为正整数，$S=\{0,1,\cdots,n\}$，定义坐标平面上的点集

$$A=\{(x,y)\in S\times S\mid -1\leq x-y\leq 1\}$$

欲在 A 中的一些点上放置路灯，每个路灯能照亮半径为 1.01 单位的范围．求最小的路灯数量，使 A 中的每个点都在发光区域内．

8. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，其外接圆在 A,B 处的切线交于点 T．直线 CT 交 AB 于点 D．记 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CBD$ 的外接圆分别为 Γ_1,Γ_2．TA 和 Γ_1 再次交于点 E，TB 和 Γ_2 再次交于点 F．直线 EF 分别交 AC,BC 于点 P,Q．求证：$EF=PQ+AB$．

9. 求证：存在一个无穷正整数列 $\{a_n\}$，使得对任意正整数 k，$a_k^2+a_k+2023$ 都至少有 k 个不同的正约数．

10. 为了庆祝第 20 届泰国数学奥林匹克，Ratchasima Witthayalai 学校在 Thao Suranari 纪念碑周围竖起了旗子，满足如下条件：

(1) 每面旗子正好用一种颜色，并且总共至少使用了 2 种不同的颜色．

(2) 旗子的数量是奇数．

(3) 每面旗子都在一个正多边形上，每个顶点都有一面旗子．

(4) 颜色相同的旗子在同一个正多边形上．

求证：至少存在 3 种颜色，它们的旗子数量相同．

tex 文稿：

2023 年泰国数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 集合 A由 20个连续正整数组成，且 A的全体元素之积、全体元素之和均不为 23的倍数．求证：A的全体元素之积不为完全平方数.

2. 在 $\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^{\circ}$，点 D在边 AB上（$D\neq A,B$），点 E在直线 AB上，且满足 B为 DE中点．设 I为 $\triangle ACE$的内心，J为 $\triangle ACD$的 A所对的旁心．求证：BC的中垂线平分线段 IJ.

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $$f(x)f(y)f(x-y)=x^2f(y)-y^2f(x).$$

4. 一场乒乓球比赛共有 101名参赛选手，每两名选手恰好比赛一次．在每场比赛中，先获得 11分者获胜，另一者负．在全部比赛结束时，已知存在比分为 $11:0$和 $11:10$的比赛．求证：存在三名选手 A,B,C，使得 A,B 中的败者与 A,C 中的败者比分相同，但不同于 B,C 中败者的比分．

5. 设 ℓ为平面上一条直线，$90^{\circ}<\theta<180^{\circ}$．考虑满足以下条件的任意不同三点 P,Q,R：

1. P在 ℓ上，且 $PQ\perp\ell$；
2. R与 Q在 ℓ同侧（R不在 ℓ上）；
3. 对 ℓ上任意两点 A,B，若 $\angle ARB=\theta$，则 $\angle AQB\ge\theta$.

求 $\angle PQR$的最小值.

2023 年泰国数学奥林匹克

程国根　译

第二天

6. 设 a,b,c,x,y均为正实数，且 $abc=1$．求证：$$\frac{a^5}{xc+yb}+\frac{b^5}{xa+yc}+\frac{c^5}{xb+ya} \geq \frac{9}{(x+y)(a^2+b^2+c^2)}.$$

7. 设 n为正整数，$S=\{0,1,\cdots,n\}$，定义坐标平面上的点集 $$A = \{(x,y) \in S \times S \mid -1 \leq x-y \leq 1 \} $$ 欲在 A中的一些点上放置路灯，每个路灯能照亮半径为 1.01 单位的范围．求最小的路灯数量，使 A中的每个点都在发光区域内.

8. 设 $\triangle ABC$为锐角三角形，其外接圆在 A,B处的切线交于点 T．直线 CT交 AB于点 D. 记 $\triangle CAD$和 $\triangle CBD$的外接圆分别为 Γ_{1},Γ_{2}. TA和 Γ_{1}再次交于点 E，TB和 Γ_{2}再次交于点 F. 直线 EF分别交 AC,BC于点 P,Q．求证：$EF=PQ+AB$.

9. 求证：存在一个无穷正整数列 $\{a_{n}\}$，使得对任意正整数 k，$a_{k}^{2}+a_{k}+2023$都至少有 k个不同的正约数.

10. 为了庆祝第 20 届泰国数学奥林匹克，Ratchasima Witthayalai 学校在 Thao Suranari 纪念碑周围竖起了旗子，满足如下条件：

1. 每面旗子正好用一种颜色，并且总共至少使用了 2种不同的颜色.
2. 旗子的数量是奇数.
3. 每面旗子都在一个正多边形上，每个顶点都有一面旗子.
4. 颜色相同的旗子在同一个正多边形上.

求证：至少存在 3种颜色，它们的旗子数量相同.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\usepackage{setspace}
\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{hyperref}
\begin{document}
\begin{spacing}{1.2}
\section*{2023 年泰国数学奥林匹克}
\begin{flushright}
程国根\quad 译
\end{flushright}
\section*{第一天}
{\bf 1.}集合$A$由$20$个连续正整数组成，且$A$的全体元素之积、全体元素之和均不为$23$的倍数. 求证：
↪ $A$的全体元素之积不为完全平方数.
\vfill
{\bf 2.}在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^{\circ}$，点$D$在边$AB$上（$D\neq A,B$），点$E$在直线$AB$上，
↪ 且满足$B$为$DE$中点. 设$I$为$\triangle ACE$的内心，$J$为$\triangle ACD$的$A$所对的旁心. 求证：
↪ $BC$的中垂线平分线段$IJ$.
\vfill
{\bf 3.} 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $$f(x)f(y)f(x-y)=x^2f(y)-y^2f(x).$$
\vfill
{\bf 4.}一场乒乓球比赛共有$101$名参赛选手，每两名选手恰好比赛一次. 在每场比赛中，先获得$11$分者获胜，另一者负.
↪ 在全部比赛结束时，已知存在比分为$11:0$和$11:10$的比赛. 求证：存在三名选手A,B,C，
↪ 使得A,B中的败者与A,C中的败者比分相同，但不同于B,C中败者的比分.
\vfill
{\bf 5.} 设 $\ell$ 为平面上一条直线，$90^{\circ}<\theta<180^{\circ}$. 考虑满足以下条件的任意不同三点 $P,Q,R$：
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]
\item $P$ 在 $\ell$ 上，且 $PQ\perp\ell$；
\item $R$ 与 $Q$ 在 $\ell$ 同侧（$R$ 不在 $\ell$ 上）；
\item 对 $\ell$ 上任意两点 $A,B$，若 $\angle ARB=\theta$，则 $\angle AQB\ge\theta$.
\end{enumerate}
求 $\angle PQR$ 的最小值.
\vfill
\newpage
\section*{2023 年泰国数学奥林匹克}
\begin{flushright}
程国根\quad 译
\end{flushright}
\section*{第二天}
{\bf 6.} 设 $a,b,c,x,y$ 均为正实数，且 $abc=1$. 求证：
$$\frac{a^5}{xc+yb}+\frac{b^5}{xa+yc}+\frac{c^5}{xb+ya} \geq \frac{9}{(x+y)(a^2+b^2+c^2)}.$$
\vfill
{\bf 7.} 设 $n$ 为正整数，$S=\{0,1,\cdots,n\}$，定义坐标平面上的点集 $$A = \{(x,y) \in S \times S \mid -1 \leq x-y \leq 1 \} $$
欲在$A$中的一些点上放置路灯，每个路灯能照亮半径为1.01单位的范围. 求最小的路灯数量，使$A$中的每个点都在发光区域内.
\vfill
{\bf 8.}设$\triangle ABC$为锐角三角形，其外接圆在$A,B$处的切线交于点$T$. 直线$CT$交$AB$于点$D$. 记$\triangle
↪ CAD$和$\triangle CBD$的外接圆分别为$\Gamma_{1},\Gamma_{2}$. $TA$和$\Gamma_{1}$再次交于点$E$，
↪ $TB$和$\Gamma_{2}$再次交于点$F$. 直线$EF$分别交$AC,BC$于点$P,Q$. 求证：$EF=PQ+AB$.
\vfill
{\bf 9.}求证：存在一个无穷正整数列$\{a_{n}\}$，使得对任意正整数$k$，$a_{k}^{2}+a_{k}+2023$都至少有$k$个不同的正约数.
\vfill
{\bf 10.}为了庆祝第20届泰国数学奥林匹克，Ratchasima Witthayalai学校在Thao Suranari纪念碑周围竖起了旗子，满足如下条件：
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]
\item 每面旗子正好用一种颜色，并且总共至少使用了 $2$ 种不同的颜色.
```

\item 旗子的数量是奇数.
\item 每面旗子都在一个正多边形上，每个顶点都有一面旗子.
\item 颜色相同的旗子在同一个正多边形上.
\end{enumerate}
求证：至少存在 3 种颜色，它们的旗子数量相同.
\vfill
\end{spacing}
\end{document}