2023 跨年题的解答

2023-01-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7ef4aff0228cb4dd

原文链接：

【新年快乐!】一道有趣的计数问题

题目：

用由 3 个小方格组成的 L 形（可旋转）和 1×1 的小方格不重叠地覆盖 4×4 的正方形棋盘，共有多少种覆盖方法？（旋转、对称后重合的视为不同方法）

解答（PDF 中已展开）

答案：

2023

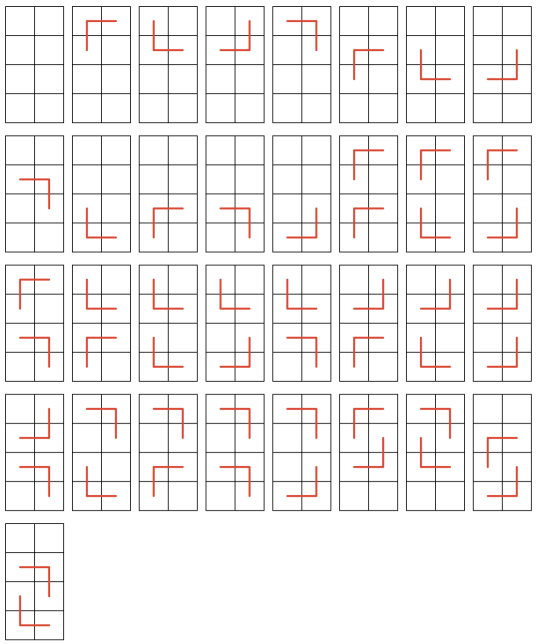
（没错，就是这个神奇的年份数字）

主要思路：

按照第一列和第二列、第二列和第三列、第三列和第四列组成的三个 4×2 矩形内 L 形的放置情况分类讨论.

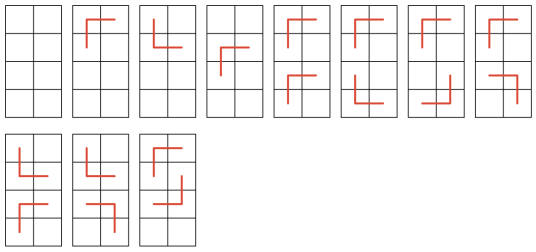
基本图形：

首先枚举 4×2 矩形内放置 L 形的所有情况，一共如下 33 种：



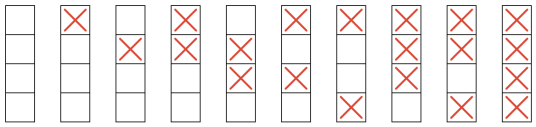
但是可以发现，里面有一些图形本质上是一样的，比如考虑对称性时，第 2、5、9、12 个图形是一样的，这在一会的分类讨论过程中能够减少讨论次数.

我们将基本图形减少为如下 11 种：

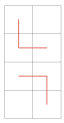


每种的个数依次为 1、4、4、4、4、2、2、4、2、2、4

再考虑单独一列被 L 形覆盖的格子情况，一共只有 10 种情况：



例如，以下基本图形的左列和右列均为第 8 种单列情况.

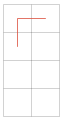


开始计数：

从第二、三列开始，其中完整的 L 形共有 33 种覆盖方式. 我们考虑在每种覆盖方式下，第一、二列和第三、四列还能放入哪几种基本的 4×2 图形.

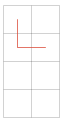
（以下为无趣的枚举，读者可以先自行尝试）

(1)  左右均没有任何限制，方法数为 $33\times 33=1089$.

(2)  左边为第四种单列情形，故第一、二列可以为第 1、7、10、11、12、13 种基本图形，共 6 种；

右边为第二种单列情形，故第三、四列可以为第 1、4、6、7、8、9、10、11、12、13、22、23、24、25、32、33 种基本图形，共 16 种.

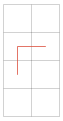
此类情况方法数为 $6\times 16\times 4=384$.

(3)  左边为第四种单列情形（同 (2) 左边），故第一、二列共 6 种；

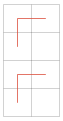
右边为第三种单列情形，故第三、四列可以为第 1、5、8、10、11、12、13、26、27、28、29 种

基本图形，共 11 种.

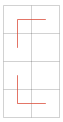
此类情况方法数为 $6 \times 11 \times 4 = 264$.

(4)  左边为第五种单列情形，故第一、二列可以为第 1、2、10、15 种基本图形，共 4 种；右边为第三种单列情形（同 (3) 左边），故第三、四列共 11 种.

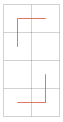
此类情况方法数为 $4 \times 11 \times 4 = 176$.

(5)  左边为第十种单列情形，故第一、二列只能为第 1 种基本图形，共 1 种；右边为第六种基本图形，故第三、四列可以为第 1、4、9、13、24 种基本图形，共 5 种.

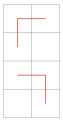
此类情况方法数为 $1 \times 5 \times 4 = 20$.

(6)  左边为第十种单列情形，故第一、二列只能为第 1 种基本图形，共 1 种；右边为第七种基本图形，故第三、四列可以为第 1、4、6、7、8、9、12、25 种基本图形，共 8 种.

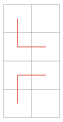
此类情况方法数为 $1 \times 8 \times 2 = 16$.

(7)  左边为第九种单列情形，故第一、二列只能为第 1、7、11 种基本图形，共 3 种；右边为第九种单列情形，故第三、四列也共 3 种.

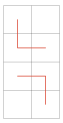
此类情况方法数为 $3 \times 3 \times 2 = 18$.

(8)  左边为第八种单列情形，故第一、二列只能为第 1、10 种基本图形，共 2 种；右边为第九种单列情形，故第三、四列共 3 种.

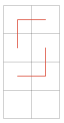
此类情况方法数为 $2 \times 3 \times 4 = 24$.

(9)  左边为第十种单列情形，故第一、二列只能为第 1 种基本图形，共 1 种；右边为第五种单列情形，故第三、四列只能为第 1、5、13、29 种基本图形，共 4 种.

此类情况方法数为 $1 \times 4 \times 2 = 8$.

(10)  左边为第八种单列情形，故第一、二列共 2 种；右边为第八种单列情形，故第三、四列共 2 种.

此类情况方法数为 $2 \times 2 \times 2 = 8$.

(11)  左边为第八种单列情形，故第一、二列共 2 种；

右边为第八种单列情形，故第三、四列共 2 种.

此类情况方法数为 $2\times 2\times 4=16$.

综上，方法总数为 $1089+384+264+176+20+16+18+24+8+8+16=2023$

注：

一般的 $2\times n$、$3\times n$ 和 $4\times n$ 的情形可以点击阅读原文查看.（$4\times n$ 的情形十分复杂）