2023 年第四届北马其顿”亚历山大-布拉泽夫斯基-凯恩”纪念赛

2022-12-23 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_7fa663e0c59f7184

高级组

第一天

1. 设 a,b,c,d 为整数. 求证：对任意正整数 n，存在至少 $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ 个正整数 $m \leq n$，使得 $m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2023m + a$ 不为完全平方数.

2. 设 $\mathbb{R}^+$ 为正实数集. 求所有函数 f:$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得对于任意 $x, y > 0$，都有

$$f(xy + f(x)) = yf(x) + x.$$

3. 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 ω，圆心为 O. 直线 AD 和 BC 交于点 E，直线 AB 和 CD 交于点 F. 点 P 在线段 EF 上，且满足 $OP \perp EF$. 圆 Γ_1 过点 A 和 E，且和 ω 切于点 A. 圆 Γ_2 过点 C 和 F，且和 ω 切于点 C. 若 Γ_1 和 Γ_2 交于 X,Y 两点，求证：PO 平分 $\angle XPY$.

第二天

1. 圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AB = AD + BC$，$CD < AB$. 对角线 AC 和 BD 交于点 P，直线 AD 和 BC 交于点 Q. $\angle APB$ 的角平分线和 AB 交于点 T. 求证：$\triangle CTD$ 的外心在 $\triangle CQD$ 的外接圆上.

2. 学校里有 1000 名学生，每个学生恰好有 4 个朋友. 称由三个学生组成的集合 $\{A, B, C\}$ 为“友好三元集”，如果集合中任意两人均是朋友. 求友好三元集个数的最大可能值.

3. 记 $\mathbb{N}_+$ 为正整数集. 求所有函数 f：$\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$，使得：

- 对任意正整数 $a > 2023^{2023}$，都有 $f(a) \leq a$.
- 对任意 $a, b \in \mathbb{N}_+$，$\dfrac{a^2 f(b) + b^2 f(a)}{f(a) + f(b)}$ 均为正整数.

初级组

第一天

1. 给定正整数 n 和平面上一点 O，作 n 条过点 O 的直线. 求 k 的最大值（依赖于 n），使得总能将 n 条直线中的 k 条染为红色，满足任意两条红色的线均不垂直.

2. 同高级组第 1 题

3. 同高级组第 2 题

第二天

1. 不定方程

$$z(y-x)(x+y)=x^3$$

是否有有限多组正整数解.

2. 同高级组第 4 题

3. 同高级组第 5 题