当斐波那契数列遇到切比雪夫多项式

2024-02-21 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8091edd44cfc3c2f

龚固老师今天发了一篇文章：当斐波那契数列遇到不定方程.

我也凑个热闹，发个斐波那契数列与切比雪夫多项式相联系的练习题. 题目比较简单，适合用来训练数学归纳法、斐波那契数列的性质推导.

题目：

设 $T_n(x)$ 为切比雪夫多项式，即 $T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$，$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x), n\in\mathbb{N}$. $\{F_n\}$ 为斐波那契数列，即 $F_0=F_1=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, n\in\mathbb{N}$. 求证：对任意 $n\in\mathbb{N}$，

$$T_n\left(-\frac{3}{2}\right)=1+(-1)^n\cdot\frac{5}{2}F_n^2.$$

解答（PDF 中已展开）

分析：

即然两者都有非常明显的递推关系，很容易想到用数学归纳法进行证明.

证明：

(1) $n=0$ 和 $n=1$ 时，容易验证结论成立.

(2) 假设 $n\le k$ 时，结论成立. 那么 $n=k+1$ 时，要证

$$T_{k+1}\left(-\frac{3}{2}\right)=1+(-1)^{k+1}\cdot\frac{5}{2}F_{k+1}^2,$$

而由 $T_{k+1}\left(-\frac{3}{2}\right)=-3T_k\left(-\frac{3}{2}\right)-T_{k-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$，只需证明：

$$\begin{aligned}&1+(-1)^{k+1}\cdot\frac{5}{2}F_{k+1}^2\\=&-3\left(1+(-1)^k\cdot\frac{5}{2}F_k^2\right)\\&-\left(1+(-1)^{k-1}\cdot\frac{5}{2}F_{k-1}^2\right)\end{aligned}$$

即证：

$$F_{k+1}^2-3F_k^2+F_{k-1}^2=2\cdot(-1)^k.$$

由通项公式：$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$，其中 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，易证：对任意 $n\in\mathbb{N}_+$，都有

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n.$$

于是

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1}^2-3F_k^2+F_{k-1}^2\\
=&F_{k+1}^2-2F_k^2-(F_k^2-F_{k-1}^2)\\
=&F_{k+1}^2-2F_k^2-(F_k-F_{k-1})(F_k+F_{k-1})\\
=&F_{k+1}^2-2F_k^2-F_{k+1}(F_k-F_{k-1})\\
=&F_{k+1}(F_{k+1}-F_k+F_{k-1})-2F_k^2\\
=&2(F_{k+1}F_{k-1}-F_k^2)\\
=&2\cdot(-1)^n
\end{aligned}
$$

因此 $n=k+1$ 时，结论也成立.

由数学归纳法知，本题结论成立.