一道三角不等式的若干解法

2021-04-11 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_80ca542337d25243

题目在非钝角三角形 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\sin A+\sin B+\sin C>2.$$

这个不等式可以由 Karamata 不等式（优超不等式）直接得到，我们先进行简单的介绍与证明.

定义两个数组：

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

其中

$$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n.$$

及

$$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

其中

$$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n.$$

若

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

且 $a_1\geq b_1$，$a_1+a_2\geq b_1+b_2$，$\cdots$，$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\geq b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}$. 则称数组 A 优超于数组 B，记作 $A\succ B$.

Karamata 不等式若数组 A 优超于数组 B，f 为一个下凸函数，则

$$\begin{aligned}&f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\\ \geq&f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_n).\end{aligned}$$

若 f 为上凸函数，则不等号反向.

解答（PDF 中已展开）

证明令 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i-\sum\limits_{i=1}^{k}b_i$，则 $S_1,\cdots,S_{n-1}\geq 0$，$S_n=0$.

由 Abel 变换得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(f(a_i)-f(b_i))\\=&\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\frac{f(a_i)-f(b_i)}{a_i-b_i}\\=&\sum_{i=1}^{n-1}S_i\left(\frac{f(a_i)-f(b_i)}{a_i-b_i}-\frac{f(a_{i+1})-f(b_{i+1})}{a_{i+1}-bi+1}\right)+S_n\frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n}\\\geq&0\end{aligned}$$

其中由下凸函数的性质：

$$\frac{f(a_i)-f(b_i)}{a_i-b_i}\geq\frac{f(a_{i+1})-f(b_i)}{a_{i+1}-b_i}\geq\frac{f(a_{i+1})-f(b_{i+1})}{a_{i+1}-b_{i+1}}$$

回到原题，我们有如下方法.

方法一

不妨设 $A\geq B\geq C$，易知

$$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0)\succ(A,B,C)$$

且 $f(x)=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上为上凸函数.

由 Karamata 不等式：

$$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin 0\leq\sin A+\sin B+\sin C$$

注意到上式无法取得等号. 于是有

$$\sin A+\sin B+\sin C>2.$$

虽然方法一直击本质，但我还是希望有一种简洁的三角证明方法. 在将 Karamata 不等式的证明过程套用过来后，我们有了方法二.

方法二

由 $A+B>\frac{\pi}{2}$ 知 $\frac{\pi}{2}-A<B$，于是

$$\sin A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)>\cos B$$

同理有 $\sin B>\cos A$. 于是

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin B+\sin C-2\\=&\sin A+\sin B+\sin C-(\sin^2 A+\cos^2 A)-(\sin^2 B+\cos^2 B)\\=&\sin A(1-\sin A)+\sin B(1-\sin B)+\cos B(\sin A-\cos B)+\cos A(\sin B-\cos A)\\>&0\end{aligned}$$

方法三由郑志远同学提供，其中将非钝角三角形这一条件转化为 $|B-C|\leq A$ 十分巧妙.

方法三

由 $\triangle ABC$ 为非钝角三角形知 $|B-C|\leq A$. 于是

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin B+\sin C\\=&\sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\=&\sin A+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\\geq&\sin A+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\\=&\sin A+\cos A+1\\=&\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})+1\\>&2\end{aligned}$$

接下来还是我最喜欢的代数不等式环节.

方法四

令 $x=\tan\dfrac{A}{2}$，$y=\tan\dfrac{B}{2}$，$z=\tan\dfrac{C}{2}$，则 $xy+yz+zx=1$，$x,y,z\in(0,1]$.

由万能公式

$$\begin{aligned}\sin A=&\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}\\=&\frac{2x}{1+x^2}\\=&\frac{2x}{xy+yz+zx+x^2}\\=&\frac{2x}{(x+y)(x+z)}\end{aligned}$$

同理

$$\sin B=\frac{2y}{(y+z)(y+x)},\sin C=\frac{2z}{(z+x)(z+y)}$$

去分母之后，只需证明

$$x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)>(x+y)(y+z)(z+x).$$

注意到

$$\begin{aligned}&x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)\\=&2(xy+yz+zx)\\=&2\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&(x+y)(y+z)(z+x)\\=&(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz\\=&x+y+z-xyz\end{aligned}$$

即要证明

$$x+y+z-xyz<2.$$

由 $x,y,z\in(0,1]$ 可得

$$\begin{aligned}&(1-x)(1-y)(1-z)\geq 0\\\Longleftrightarrow\ &1-(x+y+z)+(xy+zy+zx)-xyz\geq 0\\\Longleftrightarrow\ &x+y+z+xyz\leq 1+xy+yz+zx=2\end{aligned}$$

而

$$x+y+z-xyz<x+y+z+xyz\leq 2$$

证毕.

最后给出这个三角不等式的几何意义.

方法五

由 $\triangle ABC$ 是非钝角三角形知其外心 O 在三角形内部（包含边界）.

记 BC，CA，AB 的中点分别为 D，E，F，外接圆半径为 R. 则

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin B+\sin C>2\\ \Longleftrightarrow\ &R\sin A+R\sin B+R\sin C>2R\\ \Longleftrightarrow\ &FE+EC+BF>BO+OC\end{aligned}$$

这是一个简单的几何不等式，证明略.