既然都是隐藏思路，不如再彻底一些

2025-03-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_80e89d935c20bb9c

早上看到的一道小题，其它解答我就不贴了。说一下我的观点：

这类题目的做法，往往需要通过待定系数或者求导，求出（或者猜出）取等条件，再进行各种“神级放缩”。然而很多答案的方法往往不说明这个最重要的猜取等过程，既然这样，不如在另一方面做到极致，让放缩看起来更简单自然一些。

题目：

已知正数 a,b 满足 $3a+4b=a^3b^2$，求

$2a+b+\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$

的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

设 $a=\sqrt{2}x$，$b=\dfrac{3y}{\sqrt{2}}$，则条件变为：

$3\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y=9\sqrt{2}x^3y^2$

于是

$3x^3y^2=x+y+y\geq 3\sqrt[3]{xy^2}$

即 $x^2y\geq 1$. 此时

$$\begin{aligned}
&2a+b+\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\\
=&2\sqrt{2}x+\frac{3y}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{y}\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4x+3y+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\\
\geq&\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 11\sqrt[11]{x^4\cdot y^3\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}}\\
=&\frac{11}{\sqrt{2}}\sqrt[11]{x^2y}\\
\geq&\frac{11\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

当且仅当 $x=y=1$，即 $a=\sqrt{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

故最小值为 $\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$.