2021 年陈省身杯数学奥林匹克

2021-07-26　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8103c92887ad373f

本次比赛分两天进行，时间为 2021 年 7 月 24 日和 7 月 25 日的 18:00-21:00.

第一天

1. 已知非等腰锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线分别为 AD，BE，CF，其中，D，E，F 分别为垂足. $\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CD$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的第二个交点分别为 A_1，B_1，C_1，A_1D，B_1E，C_1F 与 $\odot O$ 的第二个交点分别为 A_2，B_2，C_2，证明：
   (1) AA_2，BB_2，CC_2 三线交于一点；
   (2) $AA_2^2+BB_2^2+CC_2^2\geq\dfrac{4(ab+bc+ca)^2}{3(a^2+b^2+c^2)}$，其中 $a=BC$，$b=CA$，$c=AB$.

2. 给定正整数 $n\geq 2$，n 个实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 满足：

$$\min_{1\leq k\leq n}\left\{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right\}=0$$

$$\max_{1\leq k\leq n}\left\{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right\}=1$$

记 $M=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$，$m=\min\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$. 求 $\min\{M-m\}$，$\max\{M-m\}$.

1. 2021 个单位正方形排成一行，其中最左侧和最右侧正方形均为黑色，其余 2019 个正方形均为白色. 随机选取两个相邻白色正方形，并随机将一个正方形染成黑色，重复此过程，直至无两个相邻白色正方形为止. 令 E 是剩余白色正方形数目的数学期望. 求不超过 E 的最大正整数 $[E]$.

2. 称 4 个单位正方形组成的图为 T 形块，图为 S 形块. 用若干个 S 形块和若干个 T 形块不重叠地覆盖一个 8×10 的长方形棋盘，且两种形状都可以旋转或翻转，则其中 T 形块至少有多少个?

第二天

1. 已知非等腰锐角 $\triangle ABC$ 的内心为 I，边 BC，CA，AB 的中点分别为 A'，B'，C'，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 内的旁切圆分别为 $\odot I_1$，$\odot I_2$，$\odot I_3$. $\odot I_1$，$\odot I_2$，$\odot I_3$ 关于点 A'，B'，C' 分别对称的圆为 $\odot I_1'$，$\odot I_2'$，$\odot I_3'$，$\odot I_1$，$\odot I_2$，$\odot I_3$ 的根心为 P，$\odot I_1'$，$\odot I_2'$，$\odot I_3'$ 的根心为 Q，证明 P 是线段 IQ 的中点.

2. 求证:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\cos\dfrac{\pi}{9}}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\cos\dfrac{2\pi}{9}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\cos\dfrac{5\pi}{9}}}=\sqrt[3]{6-6\sqrt[3]{9}}.$$

3. 对于正整数 n，定义 $S_2(n)$ 为 n 在二进制表示下的各位数码之和（例如 $S_2(13)=1+1+0+1=3$）. 设 $T=\sum\limits_{k=1}^{2021}(-1)^{S_2(k)}k^3$，请确定 T 除以 2021 的余数.

4. 有 n 名数学家参加一次会议，每名数学家在其中恰有 3 个朋友（朋友关系数相互的）. 现在任意安排若干名数学家坐在圆桌旁讨论问题，结果发现，如果每个人两侧都坐着自己的朋友，则这一桌的人数不少于 7. 求 n 的最小可能值.