第十二届 XMO 不等式的推广及证明

2023-04-14 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8151b3a6280c232e

第十二届 XMO 的二试第二题如下：

已知 $a_1, a_2, \cdots, a_{22} \in [1, 2]$，求

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{22} a_i a_{i+1}}{(\sum\limits_{i=1}^{22} a_i)^2}$$

的最大值.（其中 $a_{23} = a_1$）

本题应该是改编自一个很常见的不等式：

设 $n \geq 4$，$a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$，求证：

$$4\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2$$

其中 $a_{n+1} = a_1$.

我们把两题进行统一：

已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [1, t]$，$t > 1$，求

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^2}$$

的最大值.（其中 $a_{n+1} = a_1$）

事实上，令 $t \to +\infty$，并由齐次性不妨设 a_i 中最小值为 1，就得到了第二题的变形（$a_i > 0$，不等式左边严格小于右边）.

我们通过构造局部不等式来证明第三题：

首先由齐次性和轮换性，不妨设 $a_1 = 1$，再设 $\max\limits_{1 \leq i \leq n} a_i = a_k = A$，记 $S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

于是对 $1 \leq i \leq k-1$，有

$$\begin{aligned}
&(a_i - 1)(a_{i+1} - A) \\
=&(a_i - A)(a_{i+1} - 1) + (A - 1)(a_i - a_{i+1}) \\
\leq&(A - 1)(a_i - a_{i+1})
\end{aligned}$$

对 $k \leq i \leq n$，有

$$(a_i - 1)(a_{i+1} - A) \leq 0$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(a_i - 1)(a_{i+1} - A) \\
=&\sum_{i=1}^{k}(a_i - 1)(a_{i+1} - A) + \sum_{i=k}^{n}(a_i - 1)(a_{i+1} - A) \\
\leq&\sum_{i=1}^{k}(A - 1)(a_i - a_{i+1}) + 0 \\
=&(A-1)(a_1 - a_k) \\
=&-(A-1)^2
\end{aligned}$$

展开得:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} - (A+1)S + nA \leq -(A-1)^2$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq (A+1)S - (A-1)^2 - nA$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^2} \\
\leq&\frac{(A+1)S - (A-1)^2 - nA}{S^2} \\
=&-[(A-1)^2 + nA]\frac{1}{S^2} + (A+1)\frac{1}{S} \\
\leq&\frac{(A+1)^2}{4[(A-1)^2 + nA]} \\
=&\frac{1}{4} \cdot \frac{(A+1)^2}{(A+1)^2 + (n-4)(A+1) - (n-4)} \\
=&\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + (n-4)\frac{1}{A+1} - (n-4)\frac{1}{(A+1)^2}}
\end{aligned}$$

设 $f(x) = 1 + (n-4)x - (n-4)x^2$，$x = \dfrac{1}{A+1} \in \left[\dfrac{1}{t+1}, \dfrac{1}{2}\right]$.

$n<4$ 时，$f(x)$ 开口向上，对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}$，故在 $\left[\dfrac{1}{t+1},\dfrac{1}{2}\right]$ 递减，因此最小值为 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{n}{4}$，于是原式不大于 $\dfrac{1}{n}$，在 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立，故最大值为 $\dfrac{1}{n}$.

$n\geq 4$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{t+1},\dfrac{1}{2}\right]$ 递增，因此最小值为 $f(\dfrac{1}{t+1})$，于是原式不大于 $\dfrac{(t+1)^2}{4[(t-1)^2+nt]}$，下面我们考虑等号成立条件：

首先有 $A=t$，其次由局部不等式知每个 a_i 均为 1 或 t，并且是连续排列，即 $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=1$，$a_k=a_{k+1}=\cdots=a_n=t$，最后还应有

$$\frac{1}{S}=\frac{A+1}{2(A-1)^2+2nA}$$

即 $S=2(t+1)+2(n-4)-\dfrac{2(n-4)}{t+1}$，同时还应有 $S=(k-1)\cdot 1+(n-k+1)\cdot t$，注意这个方程组不一定会有整数解 k（这意味着取最大值时，还可能会有非边界值），感兴趣的读者可以试着求解有整数解 k 时，n 和 t 需满足的条件.

我们用第三题的结论来解决这道 XMO 的原题：

解答（PDF 中已展开）

解答：

令 $n=22$，$t=2$，有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{22}a_ia_{i+1}}{(\sum\limits_{i=1}^{22}a_i)^2}\leq\frac{(t+1)^2}{4[(t-1)^2+nt]}=\frac{9}{4(1^2+44)}=\frac{1}{20}$$

等号成立时，$(k-1)+2(23-k)=S=30$，即 $k=15$，于是 $a_1=a_2=\cdots=a_{14}=1$，$a_{15}=a_{16}=\cdots=a_{22}=2$.

于是最大值为 $\dfrac{1}{20}$.

极限情况：

$n\geq 4$ 时，令 $t\to+\infty$，有 $\dfrac{(t+1)^2}{4[(t-1)^2+nt]}\to\dfrac{1}{4}$，这就证明了：

设 $n\geq 4$，$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，求证：

$$4\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}<(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2$$

其中 $a_{n+1}=a_1$.