2025 年上海预赛第 11 题的优雅三进制做法

2025-03-12　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_81b2f7f2c6a6c6dc

记 $\mathbb{N}^*$ 表示全体正整数构成的集合. 已知定义在 $\mathbb{N}^*$ 上的严格递增函数 $f(n)$，其值域 $A \subseteq \mathbb{N}^*$，且对任意正整数 n 均有 $f(f(n)) = 3n$.

(1) 求 $f(1), f(2)$ 的值;

(2) 求 $f(2025)$ 的值.

本题也为 1992 年英国数学奥林匹克最后一题，我在之前的文章里写过，但当时没有仔细写三进制这个方法。今天再次看到这题，故决定再写一遍。

解答（PDF 中已展开）

解答:

(1)

若 $f(1) = 1$，则 $3 = f(f(1)) = f(1) = 1$，矛盾.

若 $f(1) \geq 3$，则 $f(3) > f(1) \geq 3$，$3 = f(f(1)) \geq f(3) > 3$，矛盾.

于是 $f(1) = 2$，$f(2) = f(f(1)) = 3$.

(2)

先给出一个满足题意的 $f(n)$，在三进制下考虑:

- 若 n 的首位为 1，则 $f(n)$ 为将 n 的首位改为 2 所得的数;
- 若 n 的首位为 2，则 $f(n)$ 为将 n 的首位改为 1，并在末尾加一个 0 所得的数.

容易验证这样的 $f(n)$ 严格递增，且满足 $f(f(n)) = 3n$，$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(如果是填空题，我们已经可以不负责任地直接写出答案来了。)

注: 由上可求得 $f(n)$ 的一个通项公式

$f(n) = \left[2 \cdot 3^{[\log_3 n]} - n\right] + 2n - 3^{[\log_3 n]}$

正片结束

严谨起见，我们再证明满足题意的 $f(n)$ 至多只有一个:

由 $f(3n)=f(f(f(n)))=3f(n)$.

若 $f(k)=n$，$f(k+1)=n+1$，则

$3n=f(3k)<f(3k+1)<f(3k+2)<f(3k+3)=3n+3$

于是 $f(3k+1)=3n+1$，$f(3k+2)=3n+2$.

即若 $f(k),f(k+1)$ 为连续正整数，则 $f(3k),\cdots,f(3k+3)$ 也为连续正整数.

又由（1）知，$f(1),f(2)$ 为连续正整数，可以归纳证明，所有的 $f(k)$ 均唯一确定.

事实上，写到这里，原题基本也就做出来了...所以单从考试角度来看，三进制这个方法是不必要的，但这并不影响方法本身的优雅。