2023 年巴尔干数学奥林匹克马其顿代表队选拔考试

2023-05-12　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_81d156d8f12990d8

2023 年巴尔干数学奥林匹克马其顿代表队选拔考试

程国根　译

1. 正实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 定义如下：$a_1=1$，$a_2=2$，且对任意正整数 n，

$$\frac{a_{n+1}^4}{a_n^3}=2a_{n+2}-a_{n+1}.$$

求证：对任意正整数 $N>1$，都有

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k^2}{a_{k+1}}<3.$$

2. 在一次国际象棋比赛中，每对参赛者最多只能相互对弈一次．如果对任意两位没有对弈过的参赛者 A 和 B，均恰有两位参赛者 C 和 D，他们与 A 和 B 都对弈过．此外，任意 4 位参赛者之间的对弈总局数均不为 5．求证：每位参赛者的对局数均相等．

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$．D 为线段 BC 上一点，满足 $BD<CD$．$\angle ADB,\angle ADC$ 的内角平分线分别交 AB,AC 于点 E,F．设 ω 为 $\triangle AEF$ 的外接圆，M 为 EF 的中点．射线 AD 交 ω 于点 X，过 X 作 EF 的平行线，交 ω 于点 Y．设 YM 交 ω 于点 T，求证：AT,EF,BC 三线共点．

4. 设函数 $f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{N}$ 不恒为零，且对任意正整数 a,b，都有

$$2f(ab)=(b+1)f(a)+(a+1)f(b).$$

求证：对任意素数 p，存在素数 q，正整数 $x_1,\cdots,x_n$，及 $m\geq 0$，使得

$$\frac{f(q^p)}{f(q)}=(px_1+1)\cdots(px_n+1)\cdot p^m,$$

其中 $px_1+1,\cdots,px_n+1$ 均为素数．

tex 文稿：

2023 年巴尔干数学奥林匹克马其顿代表队选拔考试

程国根　译

1. 正实数列 $\{a_{n}\}_{n=1}^{\infty}$定义如下：$a_{1}=1$，$a_{2}=2$，且对任意正整数 n，$\dfrac{a_{n+1}^{4}}{a_{n}^{3}} = 2a_{n+2}-a_{n+1}.$ 求证：对任意正整数 $N>1$，都有 $\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{a_{k}^{2}}{a_{k+1}}<3.$

2. 在一次国际象棋比赛中，每对参赛者最多只能相互对弈一次．如果对任意两位没有对弈过的参

赛者 A和 B，均恰有两位参赛者 C和 D，他们与 A和 B都对弈过．此外，任意 4 位参赛者之间的对弈总局数均不为 5．求证：每位参赛者的对局数均相等.

3. 在 $\triangle ABC$中，$AB<AC$．D为线段 BC上一点，满足 $BD<CD$．$\angle ADB,\angle ADC$的内角平分线分别交 AB,AC于点 E,F．设 ω为 $\triangle AEF$ 的外接圆，M为 EF的中点．射线 AD交 ω于点 X，过 X作 EF的平行线，交 ω于点 Y．设 YM交 ω于点 T，求证：AT,EF,BC三线共点.

4. 设函数 $f:\mathbb{N}_{+}\to\mathbb{N}$不恒为零，且对任意正整数 a,b，都有 $$ 2f(ab)=(b+1)f(a)+(a+1)f(b).$$ 求证：对任意素数 p，存在素数 q，正整数 $x_{1},\cdots ,x_{n}$，及 $m\ge 0$，使得 $$\frac{f(q^{p})}{f(q)} = (px_{1}+1) \cdots(px_{n}+1) \cdot p^{m},$$ 其中 $px_{1}+1,\cdots,px_{n}+1$均为素数.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\usepackage{setspace}
\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{hyperref}
\begin{document}
\begin{spacing}{1.4}
\section*{2023 年巴尔干数学奥林匹克马其顿代表队选拔考试}
\begin{flushright}
程国根\quad 译
\end{flushright}
{\bf 1.}正实数列$\{a_{n}\}_{n=1}^{\infty}$定义如下：$a_{1}=1$，$a_{2}=2$，且对任意正整数$n$，$$\dfrac{a_{n+1}^{4}}{a_{n}^3} =
↪  2a_{n+2}-a_{n+1}.$$
求证：对任意正整数 $N>1$，都有 $$\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{a_{k}^{2}}{a_{k+1}}<3.$$
\vfill
{\bf 2.}在一次国际象棋比赛中，每对参赛者最多只能相互对弈一次．如果对任意两位没有对弈过的参赛者$A$和$B$，
↪  均恰有两位参赛者$C$和$D$，他们与$A$和$B$都对弈过．此外，任意$4$位参赛者之间的对弈总局数均不为$5$．求证：
↪  每位参赛者的对局数均相等.
\vfill
{\bf 3.}在$\triangle ABC$中，$AB<AC$．$D$为线段$BC$上一点，满足$BD<CD$．$\angle ADB,\angle
↪  ADC$的内角平分线分别交$AB,AC$于点$E,F$．设$\omega$为$\triangle AEF$的外接圆，$M$为$EF$的中点．
↪  射线$AD$交$\omega$于点$X$，过$X$作$EF$的平行线，交$\omega$于点$Y$．设$YM$交$\omega$于点$T$，求证：
↪  $AT,EF,BC$三线共点.
\vfill
{\bf 4.} 设函数 $f:\mathbb{N}_{+}\to\mathbb{N}$ 不恒为零，且对任意正整数 $a,b$，都有 $$2f(ab)=(b+1)f(a)+(a+1)f(b).$$
求证：对任意素数$p$，存在素数$q$，正整数$x_{1},\cdots,x_{n}$，及$m\ge 0$，使得$$\frac{f(q^{p})}{f(q)} = (px_{1}+1)
↪  \cdots(px_{n}+1) \cdot p^{m},$$
其中 $px_{1}+1,\cdots,px_{n}+1$ 均为素数.
\vfill
\end{spacing}
\end{document}
```