数学竞赛中的俄罗斯方块——一道 USAMO 组合题的解答

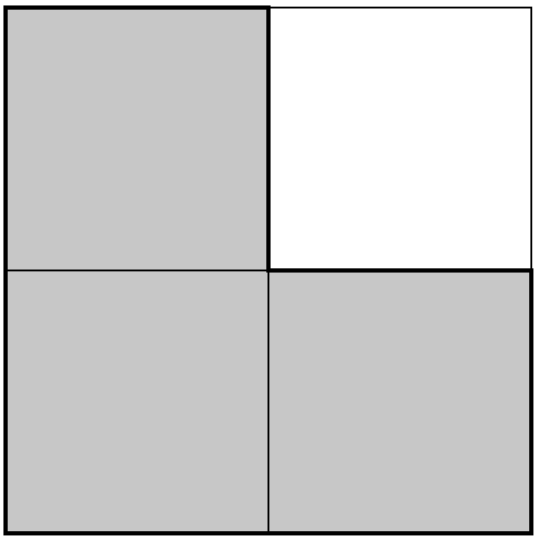
2021-04-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_82de099a17e59dba

题目 $n \geq 2$ 为整数. 有一块 $n \times n$ 的木板，初始是空的. 在每一分钟，可以完成下列三个操作之一：

1. 如果木板上有 3 个单元格组成的 L 形区域（如下图，不允许旋转），且其中都没有石头，则可以在这 3 个单元格中各放置一块石头；
2. 如果某一行的每一个单元格中均有石头，则可以将这一行的所有石头移除；
3. 如果某一列的每一个单元格中均有石头，则可以将这一列的所有石头移除。

对于满足怎样条件的 n，可以经过若干次（非零）操作后，使得木板上没有任何石头?



(2021 年 USAMO 第 1 天第 3 题)

分析看完题目立马想到了俄罗斯方块，以及一些消除类的小游戏. 构造出可以消除完所有石头的操作并不难，可以尝试 $n = 2, 3, 4$ 的情形，发现只有在 3×3 的方格中可以完成，由此推出 $3|n$ 时均满足题意. 证明其它情形不满足题意是这题的难点，关键是对每个单元格进行赋值，并构造出一个合适的生成函数. 此外，在证明答案只能是某个数的倍数时，常用单位根进行分析.

解答（PDF 中已展开）

解答先考虑 $n=3$ 时的情形，进行如下操作：

1. 进行两次操作（1），此时木板上只剩下左上、右上、右下三个空格；
2. 移除第二行的三块石头；
3. 在左边两列的空格处放置三块石头；
4. 依次移除第一列和第二列的石头.

当 $n>3$，且 $3|n$ 时，将 $n\times n$ 的木板分成若干个 3×3 的小区域，类似进行如上操作即可.

接下来考虑 3 不整除 n 时的情形.

将每个单元格进行赋值. 设从下到上第 a 行，从左到右第 b 列的单元格坐标为 (a,b). 若单元格 (a,b) 中有石头，则将其赋值为 $x^{a-1}y^{b-1}$，否则将其赋值为 0. 考虑三种操作会带来的结果：

1. 在以 (a,b) 为拐角的 "L" 形区域中放置三块石头后，所有方格赋值之和增加

$$\begin{aligned}&x^{a-1}y^{b-1}+x^{a}y^{b-1}+x^{a-1}yb\\=&(1+x+y)x^{a-1}y^{b-1}\end{aligned}$$

1. 移除第 a 行的所有石头后，所有方格赋值之和减少

$$\begin{aligned}&x^{a-1}(1+y+y^2+\cdots+y^{n-1})\\=&x^{a-1}\cdot\frac{y^n-1}{y-1}\end{aligned}$$

1. 移除第 b 列的所有石头后，所有方格赋值之和减少

$$\begin{aligned}&y^{b-1}(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\\=&y^{b-1}\cdot\frac{x^n-1}{x-1}\end{aligned}$$

由于最终木板上没有任何石头，故存在非负整系数多项式 $f(x,y)$，$g(x)$，$h(y)$，满足：

$$\begin{aligned}&(1+x+y)f(x,y)\\=&\frac{y^n-1}{y-1}g(x)+\frac{x^n-1}{x-1}h(y)\end{aligned}$$

设 $\omega\neq 1$ 为一个 n 次单位根，则对于任意的 $1\le a,b\le n-1$，

$$(\omega^a)^n=(\omega^b)^n=1$$

于是

$$\begin{aligned}&(1+\omega^a+\omega^b)f(\omega^a,\omega^b)\\=&\frac{(\omega^b)^n-1}{\omega^b-1}g(\omega^a)+\frac{(\omega^a)^n-1}{\omega^a-1}h(\omega^b)\\=&0\end{aligned}$$

又 3 不整除 n 时，$1+\omega^a+\omega^b\neq 0$，故

$$f(\omega^a,\omega^b)=0$$

固定 b，关于 x 的方程，$f(x,\omega^b)=0$ 有

$$\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$$

这 $n-1$ 个不同的根. 注意到，第 n 行的方格中一定无法被放满石头，要使得最后木板为空，则不能在第 n 行的任何方格中放置石头. 于是 $f(x,y)$ 中 x 的最高次数不超过 $n-2$，矛盾!

综上，满足题意的 n 为所有 3 的倍数.